SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA

ENSINO MÉDIO

2ª Edição

Governo do Estado do Paraná
Roberto Requião

Secretaria de Estado da Educação
Mauricio Requião de Mello e Silva

Diretoria Geral
Ricardo Fernandes Bezerra

Superintendência da Educação
Yvelise Freitas de Souza Arco-Verde

Departamento de Ensino Médio
Mary Lane Hutner

Coordenação do Livro Didático Público
Jairo Marçal

Depósito legal na Fundação Biblioteca Nacional, conforme Decreto Federal n.1825/1907, de 20 de Dezembro de 1907.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Avenida Água Verde, 2140 - Telefone: (0XX) 41 3340-1500
e-mail: dem@seed.pr.gov.br
80240-900 CURITIBA - PARANÁ

Catalogação no Centro de Editoração, Documentação e Informação Técnica da SEED-PR

Matemática / vários autores. – Curitiba: SEED-PR, 2006. – p. 216

ISBN: 85-85380-39-X

1. Matemática. 2. Ensino médio. 3. Ensino de matemática. 4. Números e Álgebra. 5. Funções. 6. Geometrias. 7. Tratamento da informação. I. Folhas. II. Material de apoio pedagógico. III. Material de apoio teórico. IV. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. V. Título.

CDU 51+373.5

2ª. Edição
IMPRESSO NO BRASIL
DISTRIBUIÇÃO GRATUITA

Autores
Alice Kazue Takahashi Lopes
Claudia Vanessa Cavichiolo
Daisy Maria Rodrigues
Donizete Gonçalves da Cruz
Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Marcia Viviane Barbetta Manosso
Mírian Longaretti
Neusa Idick Scherpinski
Roberto José Medeiros Junior

Equipe técnico-pedagógica
Claudia Vanessa Cavichiolo
Donizete Gonçalves da Cruz
Fabiana Anciutti Orreda
Lisiane Cristina Amplatz
Marcia Viviane Barbetta Manosso
Renata Cristina Lopes

Assessora do Departamento de Ensino Médio
Agnes Cordeiro de Carvalho

Coordenadora Administrativa do Livro Didático Público
Edna Amancio de Souza

Equipe Administrativa
Mariema Ribeiro
Sueli Tereza Szymanek

Técnicos Administrativos
Alexandre Oliveira Cristovam
Viviane Machado

Consultor
Carlos Roberto Vianna

Leitura Crítica
Valdeni Soliani Franco – UEM

Colaboradoras
Anne Eloise Stelmachuck
Silvia Regina Alcântara

Consultor de direitos autorais
Alex Sander Hostyn Branchier

Revisão Textual
Luciana Cristina Vargas da Cruz
Renata de Oliveira

Projeto Gráfico e Capa
Eder Lima / Ícone Audiovisual Ltda

Editoração Eletrônica
Ícone Audiovisual Ltda

2007

Carta do Secretário

Este Livro Didático Público chega às escolas da rede como resultado do trabalho coletivo de nossos educadores. Foi elaborado para atender à carência histórica de material didático no Ensino Médio, como uma iniciativa sem precedentes de valorização da prática pedagógica e dos saberes da professora e do professor, para criar um livro público, acessível, uma fonte densa e credenciada de acesso ao conhecimento.

A motivação dominante dessa experiência democrática teve origem na leitura justa das necessidades e anseios de nossos estudantes. Caminhamos fortalecidos pelo compromisso com a qualidade da educação pública e pelo reconhecimento do direito fundamental de todos os cidadãos de acesso à cultura, à informação e ao conhecimento.

Nesta caminhada, aprendemos e ensinamos que o livro didático não é mercadoria e o conhecimento produzido pela humanidade não pode ser apropriado particularmente, mediante exibição de títulos privados, leis de papel mal-escritas, feitas para proteger os vendilhões de um mercado editorial absurdamente concentrado e elitista.

Desafiados a abrir uma trilha própria para o estudo e a pesquisa, entregamos a vocês, professores e estudantes do Paraná, este material de ensino-aprendizagem, para suas consultas, reflexões e formação contínua. Comemoramos com vocês esta feliz e acertada realização, propondo, com este Livro Didático Público, a socialização do conhecimento e dos saberes.

Apropriem-se deste livro público, transformem e multipliquem as suas leituras.

Mauricio Requião de Mello e Silva

Secretário de Estado da Educação

Aos Estudantes

Agir no sentido mais geral do termo significa tomar iniciativa, iniciar, imprimir movimento a alguma coisa. Por constituírem um *initium*, por serem recém-chegados e iniciadores, em virtude do fato de terem nascido, os homens tomam iniciativa, são impelidos a agir. (...) O fato de que o homem é capaz de agir significa que se pode esperar dele o inesperado, que ele é capaz de realizar o infinitamente improvável. E isto, por sua vez, só é possível porque cada homem é singular, de sorte que, a cada nascimento, vem ao mundo algo singularmente novo. Desse alguém que é singular pode-se dizer, com certeza, que antes dele não havia ninguém. Se a ação, como início, corresponde ao fato do nascimento, se é a efetivação da condição humana da natalidade, o discurso corresponde ao fato da distinção e é a efetivação da condição humana da pluralidade, isto é, do viver como ser distinto e singular entre iguais.

Hannah Arendt
A condição humana

Este é o seu livro didático público. Ele participará de sua trajetória pelo Ensino Médio e deverá ser um importante recurso para a sua formação.

Se fosse apenas um simples livro já seria valioso, pois, os livros registram e perpetuam nossas conquistas, conhecimentos, descobertas, sonhos. Os livros, documentam as mudanças históricas, são arquivos dos acertos e dos erros, materializam palavras em textos que exprimem, questionam e projetam a própria humanidade.

Mas este é um livro didático e isto o caracteriza como um livro de ensinar e aprender. Pelo menos esta é a idéia mais comum que se tem a respeito de um livro didático. Porém, este livro é diferente. Ele foi escrito a partir de um conceito inovador de ensinar e de aprender. Com ele, como apoio didático, seu professor e você farão muito mais do que "seguir o livro". Vocês ultrapassarão o livro. Serão convidados a interagir com ele e desafiados a estudar além do que ele traz em suas páginas.

Neste livro há uma preocupação em escrever textos que valorizem o conhecimento científico, filosófico e artístico, bem como a dimensão histórica das disciplinas de maneira contextualizada, ou seja, numa linguagem que aproxime esses saberes da sua realidade. É um livro diferente porque não tem a pretensão de esgotar conteúdos, mas discutir a realidade em diferentes perspectivas de análise; não quer apresentar dogmas, mas questionar para compreender. Além disso, os conteúdos abordados são alguns recortes possíveis dos conteúdos mais amplos que estruturam e identificam as disciplinas escolares. O conjunto desses elementos que constituem o processo de escrita deste livro denomina cada um dos textos que o compõem de "Folhas".

Em cada Folhas vocês, estudantes, e seus professores poderão construir, reconstruir e atualizar conhecimentos das disciplinas e, nas veredas das outras disciplinas, entender melhor os conteúdos sobre os quais se debruçam em cada momento do aprendizado. Essa relação entre as disciplinas, que está em aprimoramento, assim como deve ser todo o processo de conhecimento, mostra que os saberes específicos de cada uma delas se aproximam, e navegam por todas, ainda que com concepções e recortes diferentes.

Outro aspecto diferenciador deste livro é a presença, ao longo do texto, de atividades que configuram a construção do conhecimento por meio do diálogo e da pesquisa, rompendo com a tradição de separar o espaço de aprendizado do espaço de fixação que, aliás, raramente é um espaço de discussão, pois, estando separado do discurso, desarticula o pensamento.

Este livro também é diferente porque seu processo de elaboração e distribuição foi concretizado integralmente na esfera pública: os Folhas que o compõem foram escritos por professores da rede estadual de ensino, que trabalharam em interação constante com os professores do Departamento de Ensino Médio, que também escreveram Folhas para o livro, e com a consultoria dos professores da rede de ensino superior que acreditaram nesse projeto.

Agora o livro está pronto. Você o tem nas mãos e ele é prova do valor e da capacidade de realização de uma política comprometida com o público. Use-o com intensidade, participe, procure respostas e arrisque-se a elaborar novas perguntas.

A qualidade de sua formação começa aí, na sua sala de aula, no trabalho coletivo que envolve você, seus colegas e seus professores.

Sumário

Apresentação

Ao longo de todos esses anos, você tem estudado Matemática e, provavelmente, consegue reconhecer algumas situações em que ela é fundamental e está mais evidente. Diante das situações vivenciadas no cotidiano de seus estudos e pesquisas, você já se questionou sobre:

O que é Matemática? Para que ela serve? Quando vou usá-la?

Parece difícil pensar respostas em poucas palavras porque a impressão que temos é que sempre poderemos complementá-las. Isto se deve ao fato da Matemática ter sido construída ao longo da história da humanidade e quase sempre relacionada com outras áreas do conhecimento. E você faz parte dessa história de construção! Alguma vez você já pensou sobre isso?

A matemática é uma ciência que provém da construção humana, seus conceitos surgiram da necessidade do homem resolver situações-problema. Essas situações normalmente estão relacionadas com outras áreas, mas nem sempre, em momentos que ficamos diante de uma situação real, percebemos que estamos usando conceitos matemáticos, mas eles estão presentes. Afinal, a matemática não é apenas uma disciplina, é uma forma de pensar que deve estar ao alcance de todos. Sendo assim, somos capazes de aprender matemática, independente do meio social que estamos inseridos, uma vez que ela é parte integrante de nossas raízes culturais.

Contemplamos neste livro os conteúdos estruturantes – Números e Álgebra, Funções, Geometrias e Tratamento da Informação –, os quais não se esgotam nas abordagens escolhidas pelos autores, sendo possíveis muitas outras.

Optamos por não apresentar, sempre que possível, as definições e demonstrações das relações matemáticas, para que você, aluno, participe da construção das mesmas e que, dessa forma, a matemática lhe possibilite leituras de mundo, contribuindo na formação do seu pensamento matemático crítico, o qual influi nas tomadas de decisões em diversas ações do cotidiano. E por que essa concepção para se abordar conteúdos de matemática?

Isso se deve ao fato de que no ensino da Matemática escolar tem se enfatizado métodos que se fundamentam no rigor das demonstrações matemáticas. Essa prática favorece o caráter meramente utilitário, que cria condições para o manejo mecânico do objeto matemático de forma a resolver situações-problema, sem a devida preocupação de buscar a validade e aceitação científica.

Elaboramos esses textos com o objetivo de que você, estudante, conceba a Matemática como uma ciência a ser experienciada. Assim, é possível vivenciá-la por meio de situações-problema do seu cotidiano, possibilitando a exploração dos conceitos matemáticos através de atividades, pelas quais possa entender os seus significados.

Nessa concepção, valorizam-se as distintas maneiras de manifestação do conhecimento matemático, ou seja, as quantidades e as formas espaciais como meio para produzirmos um raciocínio e uma lógica matemática a partir das situações ligadas às nossas experiências pessoais e coletivas.

Essas idéias aqui defendidas nos permitem pensar em uma prática de ensino de matemática numa perspectiva crítica, que articula o conhecimento matemático com as outras áreas, contribuindo na solução de problemas presentes no meio social, político, econômico e histórico no qual nos inserimos.

No ensino da Matemática, a abordagem experienciada pelo valor formativo possibilita a você, estudante, criar no seu imaginário, uma heurística que, por meio da elaboração de hipóteses, oriente a busca de soluções para as situações-problema. Uma abordagem interessante para nós é a que leva em consideração o valor estético. Esta, possibilita por meio da geometria, intervir na mudança do espaço onde circulamos e vivemos, resultado do espírito inventivo do ser humano, que faz a pessoa perceber a beleza através da apreciação, sensibilidade e, por conseguinte, de estados emocionais diversos.

As produções que fazem parte deste Livro Didático Público da Disciplina de Matemática, procuram partir de situações de nossa vivência e consideram a investigação matemática como fundamento teórico-metodológico para direcionar a prática docente. Sendo assim, ao resolver um problema matemático, pensamos nos estudantes usando etapas, tais como: a observação, a exploração, a formulação de conjecturas, a pesquisa teórica, a confirmação das conjecturas e, finalmente, a validação ou refutação das conjecturas.

I n t r o d u ç ã o

Números e Álgebra

Você já deve ter se perguntado: quando surgiram os Números? Quando surgiu a Álgebra? Houve uma data que demarcou o início desses conhecimentos matemáticos?

Os números estão presentes na vida do homem desde tempos remotos. Esses tempos são denominados Idade da Pedra e Paleolítico. Nesse período, o homem vivia em condições semelhantes à dos animais, sendo que sua atividade principal era recolher alimentos para sua sobrevivência. No transcorrer de sua história, passou a fabricar alguns instrumentos utilizados na caça e na pesca e desenvolveu linguagens que possibilitavam a comunicação. A partir do momento que o homem passou da simples coleta de alimento para a produção do mesmo, ou seja, além da caça e da pesca, começou a utilizar a agricultura, ocorreram progressos no conhecimento de valores numéricos e passaram a conhecer noções de relações espaciais.

A produção do alimento por meio da atividade agrícola foi uma transformação fundamental e a ação do homem sobre a natureza passou de passiva à ativa, isto é, os homens caçadores e pescadores foram substituídos pelos homens agricultores – iniciou-se assim, um novo período da Idade da Pedra, o Neolítico.

A agricultura criou um novo modo de vida. As idéias de contagem se desenvolveram, outros povos adotaram os conceitos e criaram seus sistemas de numeração, entre eles, citamos os sumérios, babilônios, egípcios, gregos, romanos, hebraicos, maias, chineses, indianos e árabes. Sem dúvida, a invenção do sistema de numeração conhecido hoje, que parece uma aptidão inata no homem, tem uma história excitante que varou séculos.

A Álgebra, importante capítulo da ciência Matemática, desenvolveu-se sob influências de várias culturas. Há registros na literatura da História da Matemática que os babilônios, por volta de 2000 a.C., acumulavam razoável quantidade de material que hoje pode ser classificada como

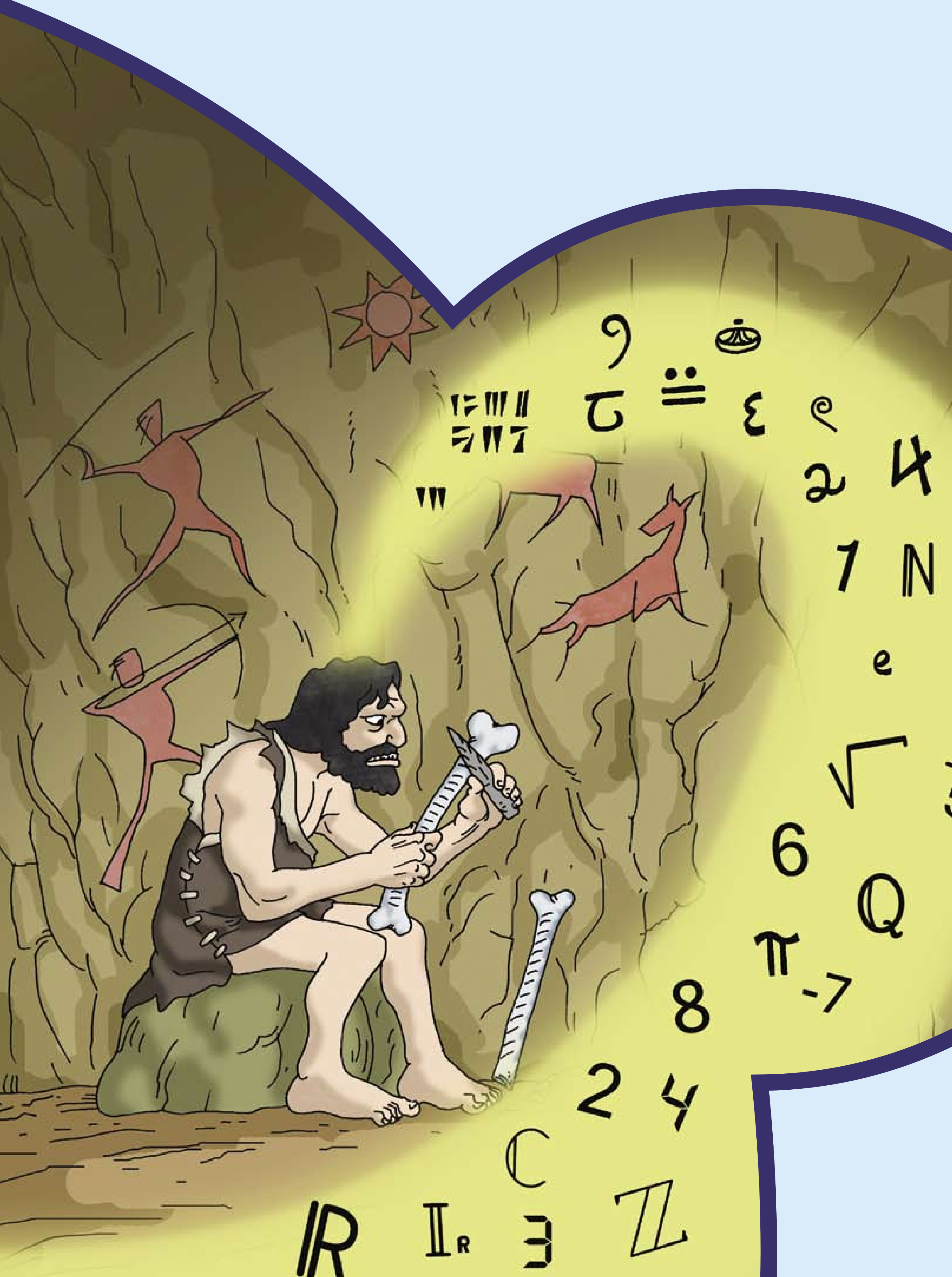
Álgebra elementar. São as primeiras considerações que a humanidade fez a respeito de idéias que se originaram de simples observações, provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e geométricas, comparar formas, tamanhos e quantidades. As idéias algébricas evoluíram e pode-se mencionar a Álgebra egípcia, babilônica, pré-diofantina, diofantina, chinesa, hindu, arábica e da cultura européia renascentista. Cada Álgebra evidenciou elementos característicos que expressam o pensamento algébrico de cada cultura. Tais idéias se desenvolveram e configuraram a Álgebra como importante meio para as pessoas resolverem problemas.

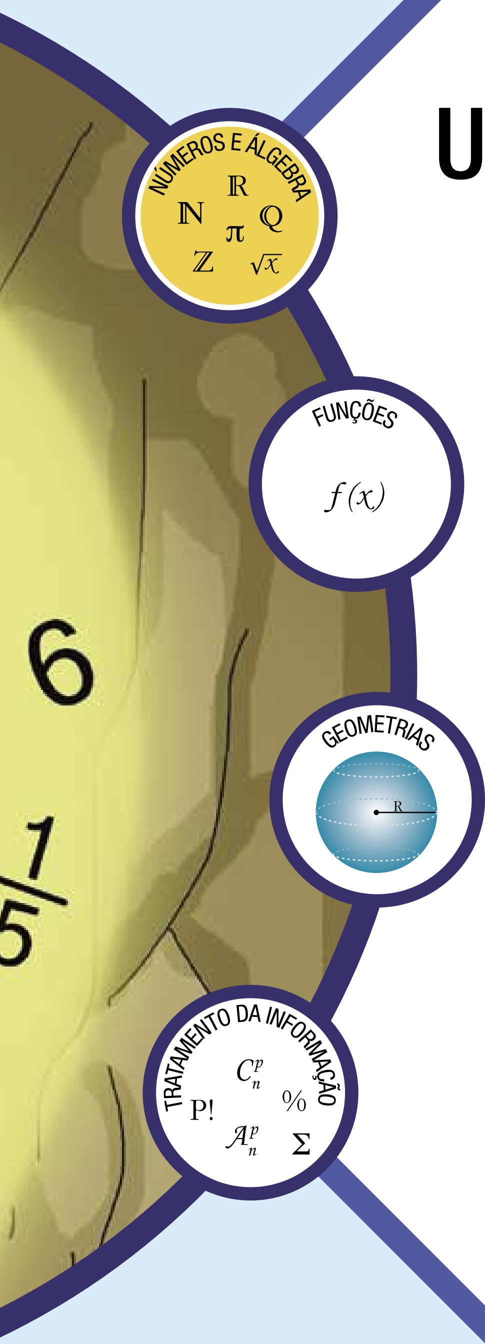
Dessa forma, somar, subtrair, multiplicar, dividir, agrupar, desagrupar, algebrizar são termos que se fazem presentes no dia-a-dia. Desde os primeiros dias de vida, os números fazem parte de nossa vida: “nasceu dia 05 de dezembro, às 19h55min, com 47 cm e 3,375 kg”. Você sabia que até nota de 0 a 10 os recém nascidos recebem? Então, por que, às vezes parece que a matemática é tão distante e sem sentido?

A intenção é que você perceba a matemática como uma construção decorrente da ação humana, fazendo com que regras e definições sejam construídas pelos atores principais da ação: você e seu professor, uma dupla que tem muito a ensinar e muito a aprender.

No Folhas **Um; dois; três; 4,5;... ; $\sqrt{27}$?** aborda-se de forma histórica a necessidade que o homem tem e teve de resolver problemas nas mais diversas situações que experienciou. Experiência é necessário para pôr em ação as interações entre você e seu professor, para familiarizá-lo, ao processo de aquisição de novas informações e conhecimentos — um processo que tem vários aspectos, entre eles: a aprendizagem, descoberta, criação e compreensão.

Pois bem, mãos à obra e vamos às descobertas!





1

Um; dois; três; 4,5; ...;$\sqrt{27}$?

Roberto José Medeiros Junior[1]

Você já parou para pensar sobre a origem dos números? Já refletiu sobre o fato de, praticamente, tudo que está a sua volta ter, em algum lugar, números?

[1]Colégio Estadual Conselheiro Zacarias - EFM -Curitiba - PR

Olhe a tira em quadrinhos abaixo:

Fonte:Prova do ENEM 2003

Que recado Mafalda quis transmitir?

Você já ouviu falar no tal "indicador de desemprego"?

Qual a relação entre o "dedo indicador" e o número três mil?

Como você acha que está o desemprego nos países de primeiro mundo?

Você conhece alguém que foi procurar trabalho fora do Brasil?

Você já ouviu falar da PME? É a **P**esquisa **M**ensal de **E**mprego. Ela fornece indicadores de mercado de trabalho e acompanha a dinâmica conjuntural de emprego e desemprego.

No início do ano 1930, os livros para alunos das séries iniciais tratavam os desempregados como "desocupados". Hoje o fenômeno do desemprego é considerado *estrutural*, isso significa que não é possível criar emprego para todas as pessoas, que o mundo está organizado (ou estruturado) de uma maneira tal que cada vez fica mais difícil conseguir empregos, e as exigências vão se tornando maiores.

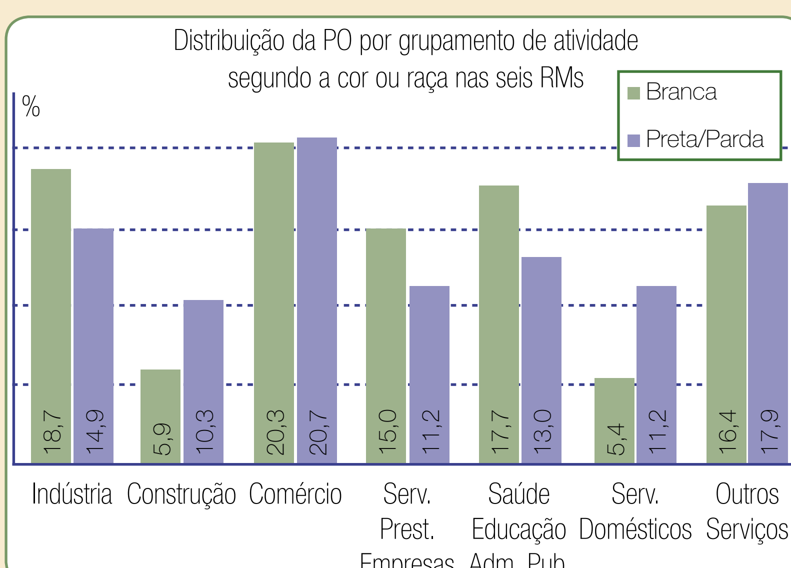
ATIVIDADE

No gráfico ao lado, a sigla PO – Pessoas Ocupadas – indica a parte da população economicamente ativa: pessoas que, num determinado período de referência, trabalharam ou tinham trabalho.

As PO são classificadas em: empregados, conta-própria, empregadores e não remunerados.

As RMs – Regiões Metropolitanas – analisadas para obter os dados que geraram este gráfico foram: Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Que informações o gráfico traz?



Fonte: Pesquisa Mensal de Emprego – PME – março de 2004 - IBGE

PESQUISA

Você sabe o que significa a sigla IBGE?

Quais as causas do desemprego no Brasil?

Como se constrói esse indicador?

Comparando a charge da Mafalda e o gráfico da PME, vemos que são mencionados números que têm características diferentes. Talvez a mais notável seja a existência de vírgulas indicando números decimais. Você acha que somente com esses tipos de números poderíamos expressar todas as situações no mundo de hoje? Sabe como são chamados esses "tipos" de números?

Com o tempo, vamos transformando cada vez mais nosso modo de comunicação. Isso significa que tanto o alfabeto quanto os números, como os modos de utilização destes recursos, estão em constante transformação. Alguns acham que isso é um "progresso", uma "evolução"; outros gostariam que as coisas não mudassem tanto.

Por acaso, você já se comunicou através de conexões on-line pela internet? Ou já teve a oportunidade de ler alguma coisa escrita em *internetês*? (linguagem utilizada na internet baseada na simplificação informal da escrita).

Oie :-)
td baum?
blz e vc?
=]
hauihauiha
kkkkkkkkkk
o q foi?
nada, to vendo a foto de um bafão que dei! hihihihihi
eh?! manda pra mim ;-)
eh... hehehehe lol... depois t mando, agora to curtindo uma house music [=)
vo nessa bjus!

As coisas mudam, há uns vinte anos esse dialeto não seria entendido. Do mesmo modo, a linguagem e a forma dos números em Matemática foram mudando com o tempo, novas representações numéricas foram aparecendo para dar conta das necessidades das sociedades. Se escrevermos o *internetês* é porque existe uma língua padrão na qual nos baseamos. Ou seja, o *internetês* é uma forma de comunicação "derivada" da língua portuguesa.

Números em transformação

Contar é preciso! A Matemática surgiu inicialmente da necessidade de contar e registrar números. Até onde sabemos nunca houve uma sociedade sem algum processo de contagem ou fala numérica (isto é, associando uma coleção de objetos com algumas marcas facilmente manipuláveis, seja em pedras, nós ou inscrições, tais como marcas em madeira ou ossos).

O objeto mais antigo, utilizado pelo homem para fazer registros de contagem, é o bastão de *Ishango*, um osso encontrado no Congo (África) em 1950, datado de 20000 a.C., possui marcas compatíveis a um sistema de numeração de base 10, é 18 mil anos mais antigo do que a matemática grega.

PESQUISA

Que tal você pesquisar um pouco mais sobre a Pré-História? Elabore um pequeno texto sobre os principais períodos da pré-história e o modo como as civilizações foram se adaptando às novas realidades.

O que seria de nós sem os números e o calendário? Você já imaginou viver sem saber em que ano, mês, dia e hora está? Quantos dias têm um ano? Você já percebeu algum padrão nos dias da semana? Como é possível saber em que dia da semana cai o seu aniversário no ano de 2020?

Segundo contam os historiadores, somente após a chegada das atividades comerciais houve uma evolução significativa da escrita e da linguagem. As palavras, até então, exprimiam coisas muito concretas e pouco abstratas, mas, o que pensar sobre os habitantes da selva da África do Sul e de algumas tribos existentes até mesmo no Paraná, que contam “um, dois e muitos?”. Até a língua inglesa ainda guarda um resquício desse estágio na palavra *thrice*, que tanto pode significar “três vezes” como “muito” ou “extremamente”.

Os Sumérios, povos que habitaram o Oriente Médio, desenvolveram o mais antigo sistema numérico conhecido. A Suméria era uma região situada ao sul da Mesopotâmia e seu povo, provavelmente, foi o primeiro a habitar esta localidade, por volta do quarto milênio a. C. O sistema sumério era posicional e utilizava a base 60 e em vez dos dez algarismos 0, 1, 2, 3, ..., 9, utilizado hoje, este sistema tinha apenas dois símbolos que representam unidades e dezenas. Os símbolos utilizados eram 𒁹 para as unidades e 𒌋 para as dezenas.

Uma aplicação do sistema de numeração sexagesimal é encontrado na contagem de tempo: uma hora é dividida em 60 minutos e o dia e a noite têm 12 horas (12 é a quinta parte de 60). Já na geometria, o círculo tem 360º, que é seis vezes 60. Percebeu a influência dos números nas civilizações? Pois então, a esses números utilizados para contar, chamamos de Números Naturais ($\mathbb{N}$).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 3000, ...\}$$

Você poderia perguntar: Mas, o zero é utilizado para contar? Como contar nada?

Historicamente o zero foi o último número a ser inventado e o seu uso matemático parece ter sido criado pelos babilônios. Sabemos que o zero apareceu para representar no sistema decimal/posicional a dezena, centena, milhar, ou seja, números cada vez maiores utilizando um tipo de sistema mais adequado às necessidades do homem. Os documentos mais antigos conhecidos onde aparece o número zero, não são anteriores ao século III a.C. Ao que se sabe, os maias foram um dos poucos povos a adotar o algarismo zero, que tinha a forma oval ou de um olho, seu sistema de numeração era posicional e usava a base 20. Um dos grandes problemas matemáticos do homem começou a ser a representação de grandes quantidades. A solução para isto foi instituir uma base para os sistemas de numeração.

O sistema numérico Indo-Árábico e a maioria dos outros sistemas de numeração usam a base dez, isto porque, aparentemente, o princípio da contagem se deu em correspondência com os dedos da mão de um indivíduo normal. Para este sistema de numeração torna-se habitual a contagem pelos dedos, não é por menos que a palavra *dígito* vem do latim *digitus* que significa dedo.

Na Base 10, cada dez unidades são representadas por uma dezena, que é formada pelo algarismo um e pelo algarismo zero, ou simplesmente, 10. Este antigo símbolo hindu era comumente usado em inscrições e manuscritos para assinalar um espaço não preenchido, que era chamado *sunya*, significando "lacuna" ou "vazio". Essa palavra entrou para o árabe como *sifr*, que significa "vago". Ela foi transliterada para o latim como *zephirum* ou *zephyrum* por volta do ano 1200. Essas sucessivas mudanças, passaram também por *zeuero*, *zepiro* e *cifre*, levaram as nossas palavras "cifra" ou "zero".

O significado duplo da palavra "cifra" hoje - tanto pode se referir ao símbolo do zero como a qualquer dígito - não ocorria no original hindu que tinham o sistema decimal com o zero, mas paravam nas unidades, não usando casas decimais. Para as frações usavam notação com dois símbolos, semelhantes ao numerador e denominador.

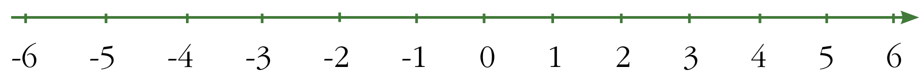
Para os problemas matemáticos enfrentados pelos povos primitivos bastavam os números naturais. Porém, através do desenvolvimento das civilizações surgiram novas necessidades, exigindo uma investigação sobre a natureza e propriedade dos números. Destas necessidades, nasceu a Teoria dos Números, por volta de 600 a.C., quando Pitágoras* e os seus discípulos começaram a estudar as propriedades de outro conjunto numérico, atualmente classificado como Números Inteiros ($\mathbb{Z}$).

*Sabe-se muito pouco sobre Pitágoras. Alguns chegam a dizer que ele não existiu e que seu nome teria sido criado para unificar os adeptos de uma seita filosófico-religiosa. Sua vida foi envolvida em aspectos mitológicos, teria recebido a filosofia por uma revelação divina (filho de Apolo) e seria onipresente. Deixou duas doutrinas célebres: a divindade do número e a crença na migração das almas de corpo em corpo. Pregava que os números constituem a essência de todas as coisas, são a verdade eterna e o princípio de tudo.

Inteiros por que não são quebrados? Isso mesmo, servem para representar quantias exatas e ainda podem ser utilizados para solucionar questões como: de dez tirei vinte, com quanto fiquei? Se preferir 10 – 20 = ?

$\mathbb{Z}$ = { ..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...}

ou



Os pitagóricos acreditavam que os números eram "realidades primordiais do universo" (CARAÇA, 2002, p.67), que tudo no universo estava relacionado com números ou razões entre eles.

Analogamente ao que aconteceu com o zero, que só foi usado muito tempo depois dos outros naturais, também a notação para as frações num sistema posicional só foi retomada com a separação entre a parte inteira e a parte fracionária no século XVI.

Esse tipo de notação está presente no conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$). Quando dividimos um número inteiro (a) por outro número inteiro (b), com b ≠ 0, obtemos um número racional. Que tal um exemplo:

Se a = 8 e b = 4, obtemos o número racional 2,0. Se a =1 e b = 4, obtemos o número racional 0,25. Ambos têm um número finito de casas após a vírgula e são chamados de racionais de decimal exata.

Existem casos em que o número de casas após a vírgula é infinito. Por exemplo, se na razão a/b, a = 1 e b = 9 nos dá o número racional 0,1111111111... É a chamada dízima periódica. O que aconteceria se essa seqüência continuasse?

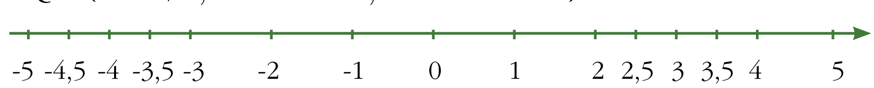
Preencha a tabela:

a	b	a/b
2	9	
3	9	
...	9	
n	9	

Existe algum padrão nessa tabela? O que acontece quando os números vão aumentando infinitamente? Você saberia demonstrar que todo número racional pode ser representado por uma dízima periódica?

Podemos considerar os números racionais como aqueles que podem ser representados como um número fracionário de quociente exato ou periódico. Englobam os números naturais e os números inteiros. Mas, inteiros e racionais têm as mesmas propriedades?

$\mathbb{Q}$ = {x = a/b, com a ∈ $\mathbb{Z}$, b ∈ $\mathbb{Z}$ e b ≠ 0}



ATIVIDADE

Que tal você pegar uma folha e desenhar um quadrado, sendo a medida do lado um número inteiro positivo. Feito o quadrado, o que se pode dizer sobre o valor da medida da diagonal?

Você acha que o valor da diagonal será um número inteiro? Para ilustrar essa situação vamos utilizar um quadrado cuja medida do lado é igual a 1. Qual será a medida do lado maior do triângulo retângulo? Será possível representar tal valor por meio de uma razão de números inteiros?

Vamos supor que existisse uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Utilizando alguns recursos aritméticos, você chegará na igualdade $a^2 = 2b^2$, o que dizer sobre a^2? Será um número par? Se for, o mesmo é verdadeiro para a, isto é, $a = 2r$, sendo r outro número inteiro. Substituindo $a = 2r$ em $a^2 = 2b^2$, obtemos, $b^2 = 2r^2$. Mas esta última relação nos diz que b^2 é número par, logo b também é par. Chegamos a um absurdo, pois $\frac{a}{b}$ é fração irredutível, não sendo possível que a e b sejam ambos pares. Somos, assim, forçados a rejeitar a suposição inicial de que $\sqrt{2}$ seja um número racional na forma $\frac{a}{b}$.

Com essa análise os pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo, já que não podiam aceitar a raiz quadrada de dois como um número, mas, não podiam negar que esta raíz era a medida da diagonal de um quadrado unitário, um número cujo valor aproximado é 1,414213562373... Como poderia isto ser um número? Tal monstruosidade feria a harmonia Divina, ficou escondida por muito tempo, para então anunciar ao mundo a presença de um novo conjunto numérico: os Números Irracionais, números que não podem ser expressos pela razão (divisão) na forma a/b com $b \neq 0$. Já parou para pensar o porquê do $b \neq 0$?

ATIVIDADE

Que tal um desafio: verifique você mesmo que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional!

Como calcular o comprimento de uma circunferência sabendo somente o diâmetro? Um fato importante notado pelos geômetras da antiguidade foi que "quanto maior o diâmetro, maior o comprimento", (usando este princípio, os gregos conseguiram resolver diversos problemas envolvendo o que hoje chamamos de "limite") mais ainda, que o comprimento da circunferência é proporcional ao seu diâmetro. Se indicarmos por C o comprimento e por d o diâmetro, isto significa que o quociente C/d é constante, qualquer que seja a circunferência considerada. Medidas experimentais mostravam que esta constante era um pouco maior do que 3. Os geômetras antigos usaram, com muito sucesso, valores aproximados para esta constante como, por exemplo, $\frac{22}{7}$.

Hoje sabemos que tal constante é um número irracional de valor bem definido chamado *pi* [π], que é a inicial da palavra grega periferia e, segundo a revista Science News, de setembro de 1989, David e Gregory Chudnovsky já o calcularam com um bilhão de algarismos decimais exatos após a vírgula.

David e Gregory Chudnovsky nasceram em Kiev, Ucrânia, depois da Segunda Guerra Mundial, e pertencem a uma classe de teóricos muito singulares. Juntos já escreveram 154 artigos e 12 livros, a maioria sobre a teoria dos números. Gregory Chudnovsky publicou seu primeiro artigo com 16 anos! Projetaram e construíram, em seu apartamento, um computador com peças compradas pelo correio, com o qual calcularam o valor de *pi* com a maior precisão de dígitos possível, batendo, assim, um recorde tão sonhado por inúmeros matemáticos.

Os irmãos David e Gregory Chudnovsky ficaram muito famosos, e foram protagonizados em um filme chamado Pi, de Darren Aronofsky. O roteiro é centrado em Max Cohen, que após quase ficar cego ao olhar para o sol, aos seis anos de idade, emerge dessa experiência com um dom incomum para Matemática. Apesar de aplicá-lo mais constantemente na solução de simples multiplicações para a garotinha que é sua vizinha, Max se dedica em empregar seu dom para identificar padrões matemáticos na natureza, a ponto de ter construído, dentro de casa, um supercomputador para auxiliá-lo em seus estudos.

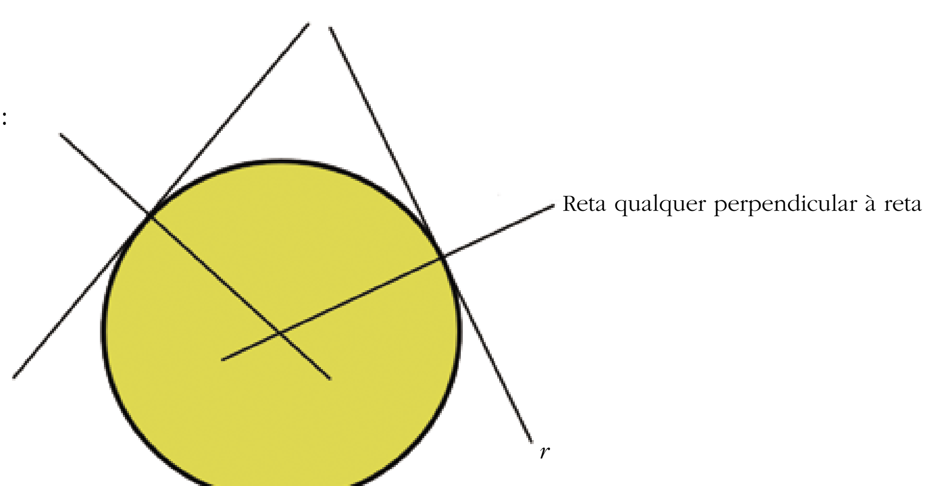
ATIVIDADE

Que tal obter experimentalmente o valor de pi? Por exemplo, vamos experimentalmente encontrar o valor de pi em um objeto circular (poderia ser a tampa de uma panela, prato ou lixeira).

Material necessário:

1. Revistas para recortar (podem ser substituídas por espetinhos de churrasco de madeira);
2. Barbante ou cadarço;
3. Objetos circulares (prato, tampa de lixeira, de margarina etc.);
4. Esquadro escolar (de madeira ou plástico);
5. Cola de madeira ou cola branca;
6. Grampeador;
7. Fita adesiva;

Eis o que pretendemos:



Desenvolvimento da atividade:

1º Passo: construir os dois pares de retas perpendiculares.

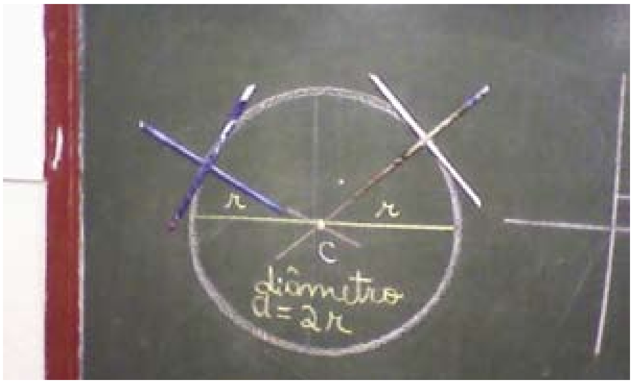
Para isso você pode enrolar quatro canudos feitos com folhas de revista, ou adquirir palitos de churrasco.

Fonte: imagem do autor, 2007.

2º Passo: acertar os ângulos entre os canudos para que se aproximem dos 90º. Feito isso, podemos fixar os canudos com o ângulo desejado com grampos métricos ou fita adesiva.

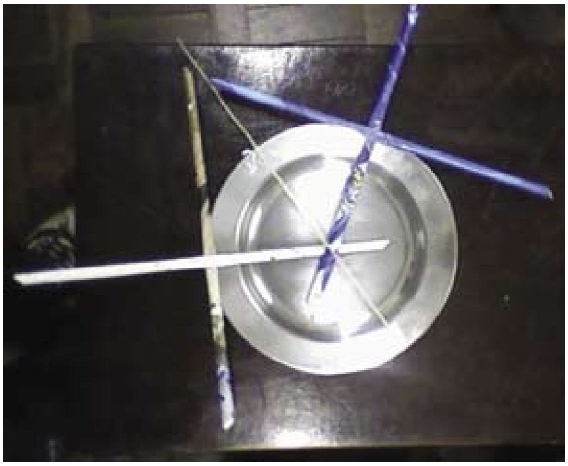
Fonte: imagem do autor, 2007.

3º Passo: com o objeto circular em mãos, passamos a determinação do centro do objeto empiricamente (a imagem que segue é um exemplo do posicionamento dos pontos de tangência).



Fonte: imagem do autor, 2007.

Em um objeto circular, teríamos o centro e o diâmetro como os apresentados:



Fonte: imagem do autor, 2007.

Note que os canudos, se interceptam de um ponto que é, aproximadamente, o centro do prato. Partindo daí, temos que:

Fonte: imagem do autor, 2007.

a) Encontrar o comprimento (perímetro) da circunferência, para isso basta contornar a tampa com um barbante, estique o barbante na régua e anote a medida encontrada.

b) Encontrar o diâmetro da circunferência. Mas o que é mesmo diâmetro? A igualdade $d = 2r$ lembra algo? Bem uma definição de diâmetro seria "segmento de reta que une dois pontos de uma circunferência, passando pelo centro". Mas cadê o centro do prato? Uma técnica interessante é primeiramente traçar duas cordas não paralelas à circunferência. Segundo: marcar as mediatrizes dos segmentos e por esses pontos traçar retas perpendiculares. A interseção das retas será o centro da tampa. O caso é que o prato das imagens não permite que sejam traçados segmentos para que sejam traçadas mediatrizes. Por isso optamos por retas perpendiculares já estabelecidas.

   O que aconteceria se transladasse a estrutura de canudos para dentro do prato? Perderíamos a localização do centro da circunferência?

c) Medir o comprimento do diâmetro na régua e, então, dividir o valor de C por d (C é comprimento da circunferência e d é o diâmetro) o resultado dessa divisão deve ser um valor próximo de 3,14... valor de pi.

   Fica como sugestão dinamizar esse translado (ou mesmo o valor de pi) no software de geometria dinâmica Geogebra.

ATIVIDADE

Agora um desafio: se a e b são números irracionais positivos, pode a potência a^b ter valor racional? Analise o caso $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$, trata-se de um número racional ou irracional?

Concluindo, da união dos números Racionais com os Irracionais surgem os números Reais, ou seja, os números do mundo real. Simbolicamente representados por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$, e de forma resumida, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

As letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, as iniciais das palavras número (ou natural), quociente e real. A letra $\mathbb{Z}$ é a inicial da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

Obras Consultadas

ÁVILA, G. **Objetivos do ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, nº 27, SBM, p. 1-9, 1995.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

COSTA, M. A. **As idéias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: EDUSP, 1971.

DEVLIN. K. J. **Os Problemas do Milênio, sete grandes enigmas matemáticos do nosso tempo**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

EVES, H. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 1996.

GARBI, G.O. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

MEDEIROS, A. & MEDEIROS, C. **Números negativos**: uma história de incertezas. Rio Claro: Bolema, ano 7, nº 8, p. 49 a 59, 1992.

STRUIK, D. J. **História concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

Obras Consultadas *ONLINE*

MIRAGLIA, F. ; JUBRAN, S. **Panorama da Cultura Árabe**: Contribuição dos Árabes ao Conhecimento. Disponível em: <http://www.icarabe.org/curso/Aula_2.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2007.

Introdução

Funções

É muito comum usarmos conceitos matemáticos em nosso cotidiano sem nos darmos conta disso, como é o caso do conceito de função. As funções matemáticas permitem representar situações reais, passíveis de serem matematizadas, facilitando a sua resolução.

A proposta destes textos é trazer não só a aplicabilidade de funções que tradicionalmente são trabalhadas de maneira formal, mas o de propor problemas instigantes e significativos que te leve a perceber que uma situação-problema de matemática pode ser tão divertida quanto jogos em rede ou tão desafiador quanto realizar seus sonhos.

Nos textos são exploradas as linguagens gráficas por essas constituírem uma das formas de conhecer e transmitir informações em nosso mundo atual.

O texto **Energia Elétrica: cálculos para entender o quanto se gasta e o quanto se paga** fala de como podemos calcular o consumo de energia elétrica em nossas casas. Vale lembrar que, por meio do estudo de função afim, é possível utilizar o consumo de energia como meio para abordar este conteúdo.

A produção sobre **Condomínios Horizontais ou Loteamentos Fechados** apresenta questionamentos de algumas famílias que estão à procura de um imóvel. Como a matemática pode auxiliar na escolha do tamanho da casa e no valor do condomínio? Os centros urbanos enfrentam a migração de um crescente número de trabalhadores rurais. Como eles vivem nas cidades? Serão abordados alguns temas sobre o Estatuto da Cidade, as leis federais e estaduais.

O texto **Risco de acidentes e expectativa de vida** mostra como podemos resolver problemas e prever resultados em situações que são expressas por funções exponenciais. Um exemplo é fazer previsões de crescimento populacional de uma região, e, outro exemplo, calcular os riscos de acidentes provocados pelo consumo de bebida alcoólica ao dirigir, calculando qual é o limite de consumo de álcool para não correr riscos de acidentes.

Em funções logarítmicas, temas como a música e som são abordados, e questões atuais, como os desastres naturais, também são exploradas. Um exemplo foi o terremoto, ocorrido no Paquistão em outubro de 2005, onde morreram mais de 39 mil pessoas. O texto **Matemática, música e terremoto, o que há em comum?** trata de como estes dois assuntos, aparentemente sem ter nada em comum, estão relacionados com os logaritmos.

Fatos que envolverarm uma crise política que o país passou são destacados em paralelo com os fatos que marcaram a história no texto de **$$$Quem mexeu no meu bolso?$$$**. A produção vem transmitir os conceitos de progressões aritméticas de um contexto social, correlatado à realidade brasileira.

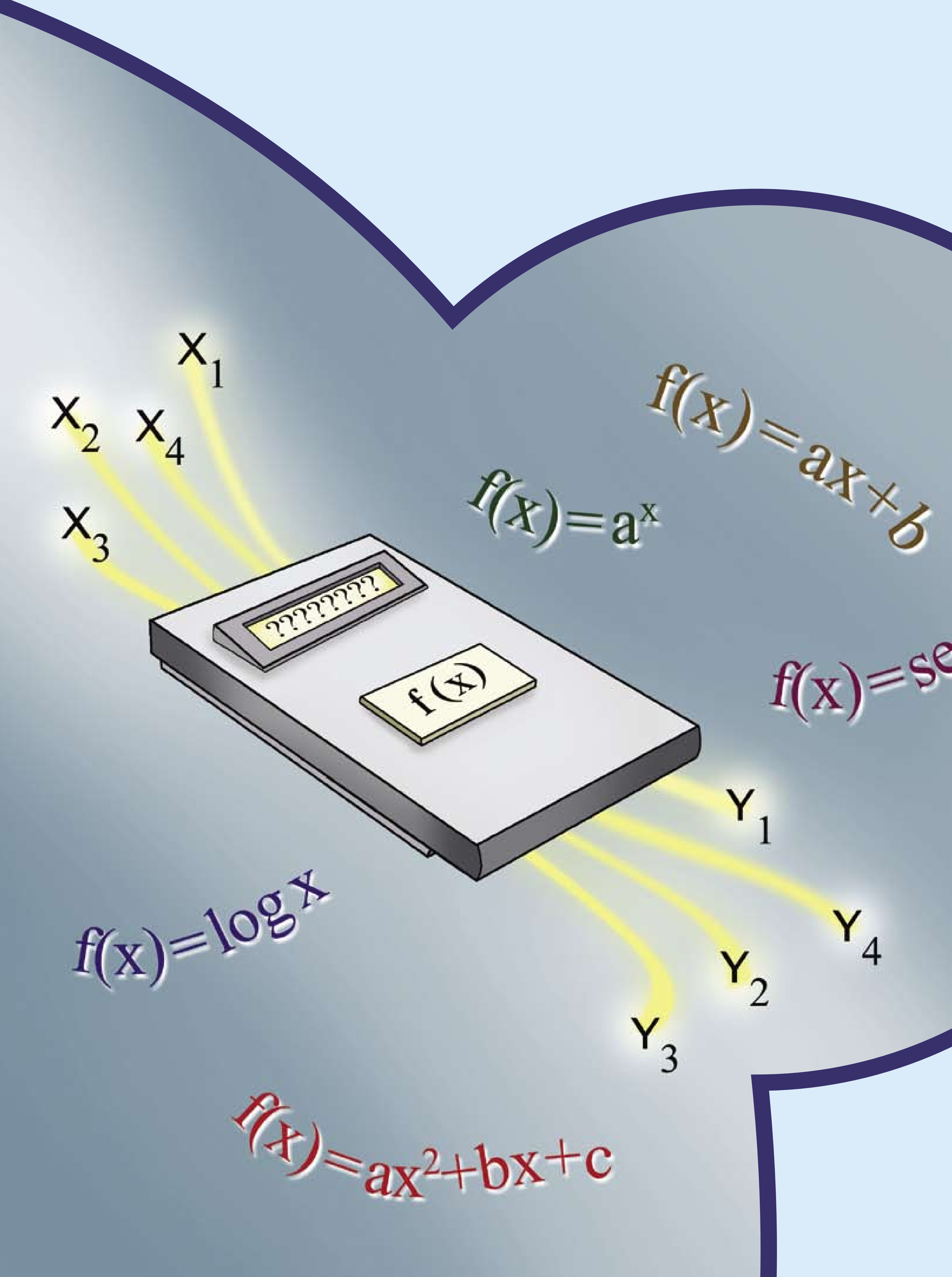
A produção **Qual é o próximo número?** busca na história da matemática sua fonte problematizadora. Assim, é possível notar que a matemática se desenvolveu pelo espírito criativo das pessoas. Aborda a presença de um conceito matemático em diferentes contextos. Faz uma relação interdisciplinar que possibilita perceber que tal conceito contribui para resolver problemas em várias atividades humanas. Este conceito se manifesta no desenvolvimento de alguns vegetais, e podemos enxergá-lo inserido na beleza de elementos da natureza. Não sabemos se esse conhecimento matemático contribuirá para explicações sobre o desenvolvimento de espécies vegetais, isso é tarefa para a pesquisa científica, e, quem sabe um dia, teremos alguma resposta nesse sentido. O que nos importa agora é, por meio da observação das regularidades no desenvolvimento de alguns vegetais, poder conhecer mais sobre esse assunto matemático.

O Folhas **A Rede e o Ser** discute que as promessas de ganhar dinheiro através de negócio em rede pode não ser tão fácil como se diz. Pelo contrário, autonomia, alta rentabilidade, possibilidade de ser o próprio patrão, ter sucesso nos negócios, ganho em grupo de forma que consiga morar em uma casa própria, dirigir o carro de seus sonhos, viajar ao redor do mundo, como normalmente a propaganda comenta, pode ser uma falácia. Os cálculos matemáticos e a relação interdisciplinar dessa produção possibilitam levantar idéias e discussões em torno de assuntos muito presentes em nosso cotidiano, tais como: desemprego, formação das grandes redes comerciais e industriais e a desvalorização da pessoa no mundo capitalista globalizado.

No texto **Venha navegar por outros mares**, você é convidado a fazer uma viagem astronômica começando pelo século II a. C. até os dias atuais, onde as medidas astronômicas entre planetas e astros são calculadas através de recursos tecnológicos avançados. Também trata da importância da Trigonometria na era dos descobrimentos, em que as rotas das navegações eram traçadas em função da distância do navio às estrelas, as quais eram usadas como pontos de referência.

O Folhas **Rodando a Roda** apresenta as funções trigonométricas, através do estudo do movimento descrito por uma roda gigante, mostra-se as aplicações da função seno durante a trajetória do passeio. Você poderá conhecer a evolução da trigonometria que inicialmente era utilizada para auxiliar os cálculos na astronomia até o momento em que ela se torna um conteúdo onde outras associações são possíveis além daquelas relacionadas ao estudo de ângulos e lados de um triângulo.

Afinal, o que você entende por funções?



x_1
x_2 x_4
x_3
$f(x)=ax+b$
$f(x)=a^x$
?????????
f(x)
$f(x)=$se
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$

2

ENERGIA ELÉTRICA: CÁLCULOS PARA ENTENDER O QUANTO SE GASTA E O QUANTO SE PAGA

Alice Kazue Takahashi Lopes[1]

Você sabe quanta energia elétrica está gastando em sua residência e como é efetuado o cálculo da conta que se paga?

Você já imaginou como seria o mundo sem eletricidade? Pensar em um mundo sem eletricidade é um desafio. Com certeza, seria completamente diferente deste em que vivemos. Isso nos leva a perceber a importância da eletricidade para o nosso modo de vida. Para responder a pergunta, é interessante conhecer sobre eletricidade, entender como ela é gerada, como os aparelhos transformam a energia elétrica em outra forma de energia e sua interferência em nossas vidas.

[1]Colégio Estadual Vital Brasil - EFM - Vera Cruz do Oeste - PR

O homem, desde que se reconheceu como ser social, criou maneiras de se comunicar com seus semelhantes e viver confortavelmente. Das primeiras tecnologias até os modernos processos na construção de uma televisão, de um computador, do funcionamento da internet, foi percorrido um longo caminho. A eletricidade contribuiu e contribui de modo decisivo para essas e outras invenções que são grandes conquistas. Podemos dizer que o uso da eletricidade, de certa forma, aproxima os indivíduos, pois o mundo está interligado por redes que dependem da eletricidade para seu funcionamento. Exemplo, redes de computadores.

As distâncias parecem ter encurtado devido à facilidade de comunicação entre lugares longínquos. Por exemplo, a televisão, por meio de seus programas, nos mostra o que acontece no mundo, muitas vezes em tempo real, ocorrendo o mesmo com a internet. É possível curtir as emoções ao vivo, sem sair de casa.

Hoje, o desenvolvimento científico e tecnológico depende da produção de energia elétrica e isso afeta o nosso modo de vida, visto que somos seres dependentes dos avanços possibilitados por tal energia.

Obtemos a energia elétrica através de um gerador, que transforma outras modalidades de energia em energia elétrica, como: usinas hidroelétricas, termoelétricas, até pilhas e baterias.

PESQUISA

É evidente, que a eletricidade traz conforto e contribui significativamente para a nossa qualidade de vida; no entanto, devemos estar atentos para as seguintes questões:

a) Como a energia elétrica chega até as residências?

b) Como é gerada?

c) Quais são as fontes alternativas de energia elétrica?

d) Que impactos ambientais são decorrentes da produção da energia elétrica?

São questões que merecem atenção de nossa parte, pois as construções de usinas hidroelétricas e termoelétricas, por um lado, nos trazem conforto; mas, por outro, podem nos trazer conseqüências por conta das alterações no meio ambiente.

ATIVIDADE

Buscando respostas para nosso problema, vamos desenvolver uma atividade interessante. Com a conta de luz de sua casa em mãos, analise os gastos dos últimos cinco meses que constam na fatura. Para entender melhor, suponha que os últimos 5 meses sejam: janeiro, fevereiro, março, abril e maio. Complete o quadro a seguir:

Quadro1

Mês	Consumo (Kwh)	Valor mensal (R$)
Janeiro		
Fevereiro		
Março		
Abril		
Maio		

Observando o quadro 1, responda:

a) Como está o consumo de energia elétrica em sua casa? É possível economizar?

b) Qual o preço do kwh? O que significa esse valor?

c) Compare a sua conta de luz com a de seus colegas. Existe diferença entre a conta de sua casa e a de seus colegas?

d) Na mesma cidade, muda o valor pago pelo kwh de um bairro para outro? E qual o valor na zona rural? E nas indústrias?

Ainda em relação ao quadro 1, responda:

É possível alterar o valor mensal em reais, sem alterar o consumo (kwh)? ( ) SIM ( ) NÃO. Justifique.

Que valores dependem um do outro?

Desafio:

Escreva a expressão matemática que a companhia de luz utiliza para calcular o valor mensal, em reais, de cada residência em função do consumo (kwh).

PESQUISA

Mas o que é quilowatt-hora? Como ele é obtido? Você sabe como funciona o mecanismo de um relógio medidor do consumo de energia elétrica? Como se calcula o consumo de um eletrodoméstico?

Os aparelhos eletrodomésticos são os receptores da corrente elétrica, eles transformam a energia elétrica em funções mecânicas ou térmicas, na sua grande maioria. Cada aparelho indica sua potência, conforme o fabricante, em watt (w), que é a razão entre a quantidade de energia em joule (J) e o intervalo de tempo em segundos (s). Assim temos:

$$[w] = \frac{[J]}{[s]}$$

Mas, o que é potência? Trata-se da energia transferida ao sistema na unidade de tempo. Pois 1 w significa que ao sistema chega 1 J de energia por segundo, que pode ser calor, como os exemplos das principais funções de um ferro elétrico ou chuveiro. Num ferro elétrico, por exemplo, o fabricante indica que o ferro possui uma potência de 1 200 w, e uma pessoa utiliza esse aparelho por uma hora (3 600 s), o consumo de energia elétrica (E) será igual a 1 200 vezes 3 600, podemos escrever da seguinte forma:

E = 1 200 . 3 600

E = 4 320 000 J

Para uma residência, a unidade Joule (J) é considerada pequena, assim utiliza-se o Kwh, como unidade de energia, que vai ser um pouco maior para medir esse consumo de energia elétrica. Podemos observar a letra k nessa unidade. Quem é ela e o que ela representa? A letra k (letra grega) equivale a quantidade 1000, e faz com que a unidade de energia em Kwh represente uma unidade ainda maior. Como exemplo:

1 kwh = $1 \cdot 10^3$ w $\cdot$ 1h = 10^3 w $\cdot$ 3 600 s = 10^3 w $\cdot$ 3,6 $\cdot$ 10^3 s = $\mathbf{3{,}6 \cdot 10^6}$ **J**

PESQUISA

Faça um levantamento dos aparelhos elétricos existentes em sua casa, observe qual a potência em watt. Partindo da hipótese que o tempo, em horas, que o aparelho fica ligado é de um mês, calcule o consumo mensal em kwh.

Devemos ainda considerar outras informações, como alguns aparelhos eletrodomésticos que não utilizam a sua potência total 24 horas por dia, porém permanecem ligados todo o tempo, exemplo, a geladeira. E daí, como fazemos?

Além de todas essas informações, devemos verificar a tarifa de cobrança utilizada pela companhia de energia elétrica.

ATIVIDADE

Após obter as informações da pesquisa, vamos fazer os cálculos?

Quadro 2

Aparelhos elétricos	Potência (watts)	Tempo (horas) em um mês	Consumo mensal (kwh)

Observando o quadro 2, responda:

a) Qual o aparelho elétrico que mais consome energia?

b) Expresse uma equação matemática que represente o valor a ser pago, no final de um mês, pelo consumo de um aparelho.

c) Através da equação obtida no item (b), calcule o valor a ser pago de cada aparelho descrito no quadro 2.

d) Ao realizar os cálculos do item (c), pode-se observar que existe uma relação de dependência entre as variáveis, onde o valor a ser pago de cada aparelho depende do consumo mensal, ou seja, trata-se de uma função. Construa um gráfico de segmentos no plano cartesiano onde o eixo x representa o consumo mensal de energia e o eixo y, o valor a ser pago.

e) Observando o gráfico, responda se esta função é crescente ou decrescente. Justifique.

Até agora, você pôde perceber o quanto gasta cada aparelho elétrico. Isso aponta para a possibilidade, se for o caso, de economizar energia, podendo evitar futuros problemas, por exemplo, apagões. Você já ouviu falar do apagão? Trata-se de uma crise de energia elétrica que ocorreu no Brasil em 2001 e 2002, afetando seu fornecimento e distribuição. Foi denominado de “apagão” por gerar interrupções de energia elétrica, com períodos de cortes forçados, principalmente nas grandes cidades, deixando a população, literalmente, “no escuro”. Nesse sentido o governo se preocupa em evitar que a energia elétrica seja utilizada pela população ao mesmo tempo, adotando assim o horário de verão. O conceito matemático que estamos tratando pode ser vivenciado em muitas situações de nosso cotidiano. Uma situação possível de abordá-lo é a saída de água das torneiras.

PESQUISA

Faça uma pesquisa sobre a crise do “apagão” registrando as principais informações.

ATIVIDADE

Suponhamos que, por uma torneira, passem 10 litros de água por minuto. Baseado nessa informação, complete o quadro 3, considerando que o tempo 0 (zero) equivale ao momento de abertura da torneira.

Quadro 3

Tempo (minuto)	0	1	2	3	4	5	6	10	15	20	30
Volume (litros)											

Com base nas informações do quadro 3, responda:

a) O que ocorre com o volume de água que passa pela torneira a medida que o tempo aumenta? As duas grandezas envolvidas, volume e tempo, são proporcionais? Direta ou inversamente? Por quê?

b) Nesta situação, a relação entre as grandezas volume e tempo definem uma função? Justifique.

Observe, que a idéia de função entre grandezas que estamos tratando se encontra presente em outras situações na nossa vida. É comum no nosso dia-a-dia vivenciarmos essas situações, como: o preço a pagar por uma ligação telefônica; a dose de um remédio, que é dado em função do peso da criança ou do adulto; no sapato que a pessoa compra, que está em função do tamanho dos pés; e, também, na tarifa de água dada, em função do volume consumido.

Uma forma importante de se representar o conteúdo que estamos estudando, ou seja, função matemática, é através da representação gráfica. Os gráficos estão sendo utilizados não só na matemática como em outras áreas do conhecimento.

Diariamente nos deparamos com tabelas e gráficos através de jornais, revistas, livros e empresas que, de forma simples, ilustram fatos do cotidiano. Os gráficos, para certas ocasiões, facilitam ler os dados de um texto que se apresentam, por exemplo, na forma de uma tabela.

ATIVIDADE

a) Faça um gráfico referente ao quadro 3.

b) Que informações você pode obter da função representada através desse gráfico?

DEBATE

a) Será que há outras funções como estas, que também têm como gráfico uma reta?

b) Todo gráfico é gráfico de uma função? Justifique.

Para realizar uma interpretação gráfica vamos buscar uma situação onde se aborda conceitos químicos. Sabemos que nós e outros seres vivos dependemos da água para sobreviver. Até podemos ficar algumas semanas sem comida, mas sem água não resistimos por muito tempo. Precisamos dela para limpar nossas casas, lavar roupas, irrigar plantações, dissolver produtos químicos, gerar energia, etc.

A água mantém as atividades do nosso corpo e, muitas vezes, a tomamos em soluções. Em química, **soluções** são **misturas homogêneas** de duas ou mais substâncias, ou seja, ficam totalmente dissolvidas umas nas outras. Por exemplo, o melado é uma mistura homogênea de açúcar e água. As moléculas de açúcar estão dispersas e misturadas completamente com a água, de modo que não se podem ser vistas regiões ou partículas separadas (ATKINS, p. 80). Mas muitas vezes, quando vamos preparar uma bebida adoçada, como um suco, pode ser que ao adicionar uma certa quantidade de açúcar, uma parte não se dissolva, ficando depositada no fundo do copo. Por que isso acontece?

Ao adicionarmos 20g de glicose ($C_6A_{12}O_6$) - açúcar - a 100ml de água (H_2O) à temperatura ambiente, toda glicose se dissolve. Porém, aumentando a quantidade de glicose para 200g, à mesma temperatura, parte da glicose permanece não-dissolvida (Fig. 1). Como a quantidade de água é predominante, dizemos que a água é o **solvente**, sendo a glicose, menor quantidade, o **soluto**.

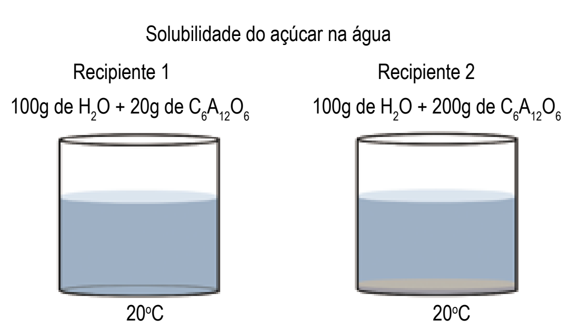


Figura 1

Quando usamos o termo dissolver, queremos dizer o processo de produzir uma solução. Geralmente o componente da solução presente em grandes quantidades é chamada de solvente e as substâncias dissolvidas são os solutos (ATKINS, p. 80).

Mas como compreender os mecanismos da dissolução? Por que algumas substâncias se misturam perfeitamente e outras não?

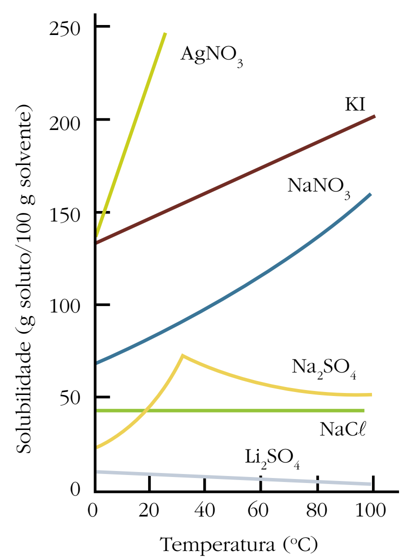
Bem, isso depende do **grau de solubilidade** de cada substância.

Grau de solubilidade é a quantidade necessária de uma substância, o solvente, para dissolver outra, o soluto. Quando isso ocorre, dizemos que a mistura torna-se uma **solução saturada** ou que atingiu o **ponto de saturação**, que depende do solvente, do soluto e das condições físicas, isto é, a temperatura também influência.

A maioria das substâncias dissolve mais depressa a temperaturas mais altas, porém existem casos em que ocorre exatamente ao contrário. Neste caso, pode dizer que o grau de solubilidade das substâncias ocorre **em função** da temperatura.

Uma das formas de representar o grau de solubilidade das substâncias químicas é a utilização de gráficos – curvas de solubilidade, muito úteis para comparar a solubilidade de vários compostos e analisar o comportamento da mesma com a variação da temperatura, relacionando-as entre si.

Princípios de Química



ATIVIDADE

Observando o gráfico anterior, responda:

a) Qual é a relação de dependência entre a temperatura e a solubilidade de $AgNO_3$, KI e $NaNO_3$?

b) Qual das substâncias é representada pela função y = ax + b?

c) Qual das substâncias tem a sua solubilidade aumentada mais rapidamente, a medida que aumenta a temperatura? E mais lentamente?

d) Descreva o que ocorre com a solubilidade de Na_2SO_4 e Li_2SO_4, em relação à temperatura?

Obras Consultadas

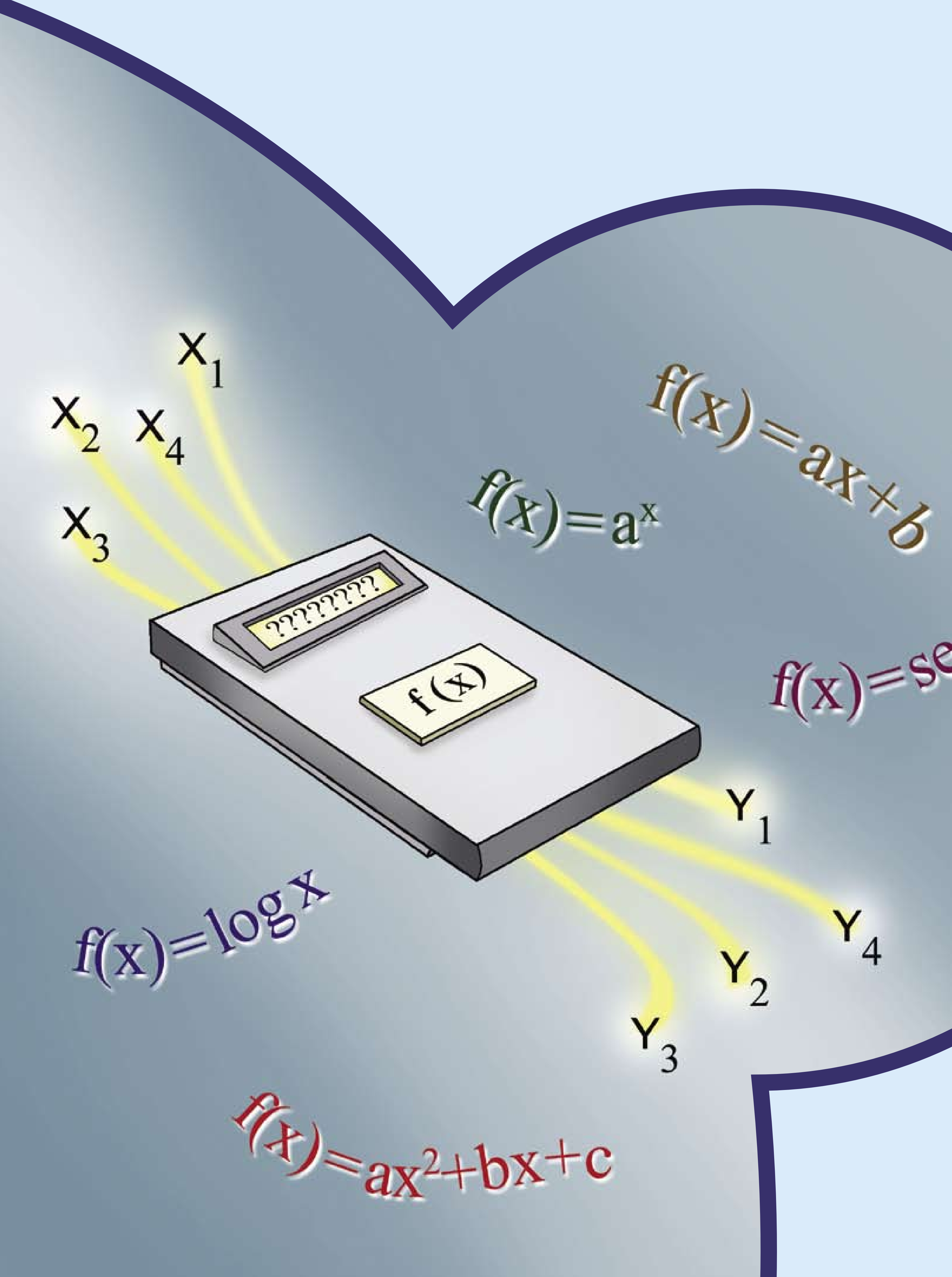
ATKINS, P.; JONES, L. **Princípios de Química:** questionando a vida moderna e o meio ambiente. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: GOMIDE, E. F. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

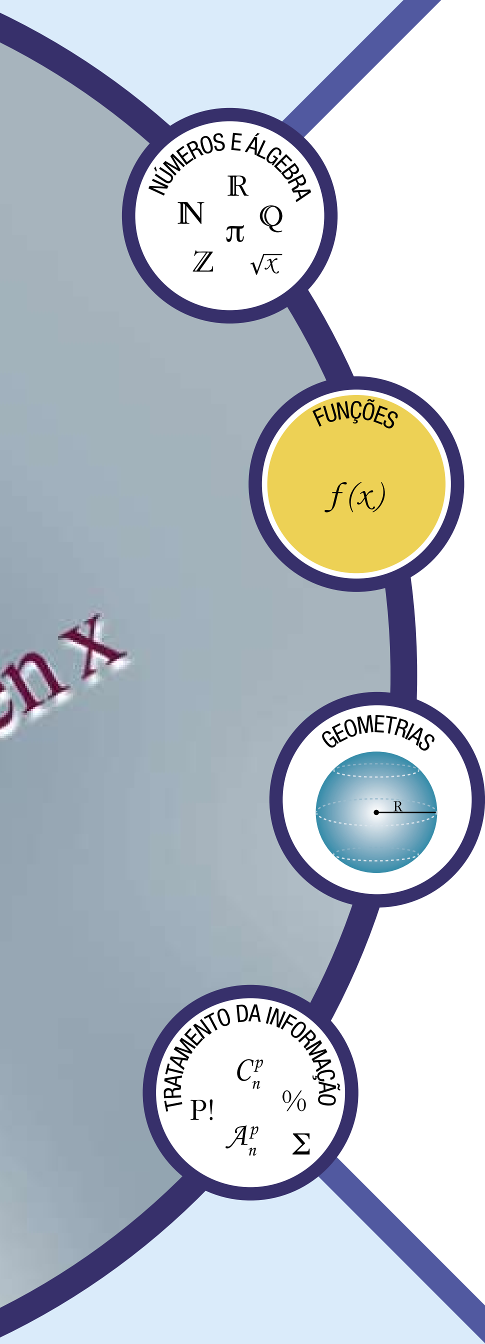
LAGES, E.L. et all. **A Matemática do Ensino Médio.** 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

TIPLER, P. A. **Física:** eletricidade e magnetismo. Tradução: HORÁCIO, M. v. 3, 3ª ed. Rio de janeiro: ABDR, 1995.

ANOTAÇÕES



x_1
x_2
x_4
x_3
?????????
f(x)
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
$f(x)=se$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$



3

CONDOMÍNIO HORIZONTAL OU LOTEAMENTO FECHADO?

Marcia Viviane Barbetta Manosso[1]

Os anúncios de loteamento fechado ou de condomínio horizontal despertam o sonho de consumo de muitas famílias brasileiras, porque esses espaços visam a maior segurança dos moradores e também oferecem opções ao proprietário de escolher o terreno e construir a própria casa. Mas na hora da compra, surgem alguns questionamentos desse imóvel: "**qual será a possível área da casa?**" e "**qual é a taxa do condomínio?**". Esses questionamentos serão abordados na seqüência.

Como a matemática pode auxiliar nessa escolha?

[1]Colégio Estadual do Paraná - EM - Curitiba - PR

O grande crescimento populacional das áreas urbanas, resultado do crescimento natural de sua população – aliado ao processo de migração do campo para a cidade – e do modelo de desenvolvimento capitalista, contribuiu para um crescente número de trabalhadores não-profissionalizados, fazendo com que a economia formal não desse conta de absorver esse contingente de trabalhadores como mão-de-obra. Aqueles que não conseguem um trabalho com carteira assinada, o setor informal, muitas vezes, oferece oportunidades econômicas, só que sem direitos trabalhistas, como: férias remuneradas, décimo terceiro salário, etc. A economia informal tem outros agravantes, pois não paga impostos, dificultando, assim, investimentos públicos. As cidades, com a escassez de recursos, não conseguem atender às demandas de saúde, habitação, educação, segurança, lazer e trabalho.

Foto: Icone Audiovisual

O crescimento desordenado das cidades brasileiras pode ser constatado na irregularidade do uso do solo através da presença de loteamentos clandestinos, das invasões de área de proteção de mananciais ou terrenos alagados e da formação de favelas; esses fatos são realidades até mesmo das cidades menores. Esses espaços são conhecidos como cidade informal ou ilegal, devido a sua construção não ser legalizada.

DEBATE

Quais outros problemas que podem ocorrer em uma cidade em função do crescimento desordenado?

Mas como resolver esses problemas? O Estatuto da Cidade, lei federal nº 10.257, de julho de 2001, tem como objetivo garantir o direito à terra urbana, à moradia, ao saneamento ambiental, à infra-estrutura urbana, ao transporte e aos serviços públicos, ao trabalho e ao lazer, para as presentes e futuras gerações, dentre outros. Essa lei ficou um período de 11 anos em discussão no Congresso Nacional até ser regulamentada no "Estatuto da Cidade" os artigos 182 e 183 da Constituição Federal de 1988.

PESQUISA

Pesquise o Estatuto da Cidade no site: *http://www.paranacidade.org.br/estatuto_cidade/estatuto_cidade.php*, e descreva como ela pode contribuir para a melhoria das condições de moradia da população urbana.

No Estado do Paraná, o governo estadual somente firma convênios de financiamento de obras de infra-estrutura e serviços, com municípios que seguem o Estatuto da Cidade e disponham de Planos Diretores, conforme apresenta o Decreto Estadual nº 2581, de 17 de fevereiro de 2004.

A Legislação Urbana, ou as leis que tratam das políticas de planejamento e desenvolvimento do espaço urbano, é constituída por outras medidas legais, entre elas, temos:

- Lei de Parcelamento do Solo para Fins Urbanos;
- Lei do Perímetro Urbano e da Expansão Urbana;
- Lei de Uso e Ocupação do Solo Urbano (Zoneamento);
- Lei do Sistema Viário;
- Código de Obras;
- Código de Posturas.

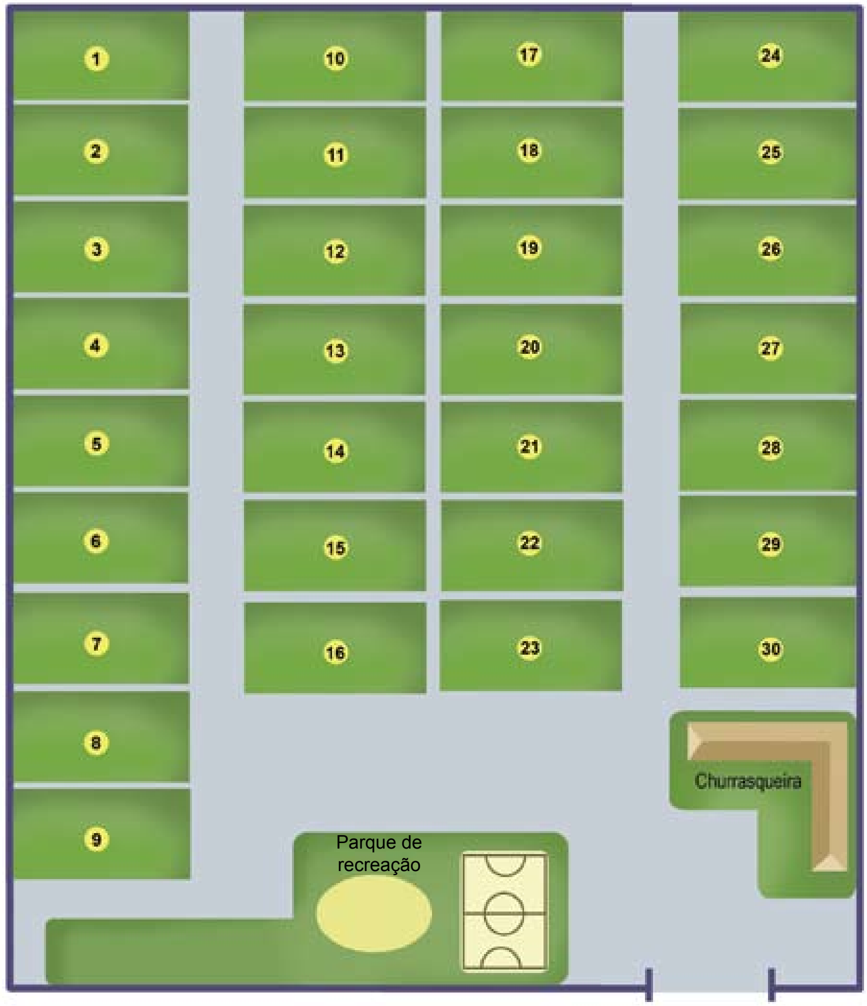
Antes de adquirir o imóvel, deve-se observar se o loteamento ou o condomínio têm o projeto viabilizado e aprovado na prefeitura. Mas, como é feito esse processo?

Deve-se buscar inicialmente as normas e restrições de um loteamento urbano na Lei Federal 6766/79 sobre o parcelamento do solo, que também tem de cumprir a disposição da Lei Municipal.

PESQUISA

Obtenha informações da Lei Federal nº 6766, de 19 de dezembro de 1979, e de suas alterações no site *http://www.paranacidade.org.br/leg_urbana/leg_urbana.php.* Identifique qual a relação entre esta lei e os loteamentos urbanos.

Muitas construtoras já esclarecem ao futuro comprador que ele pode financiar uma parte do imóvel e também utilizar 30% de sua renda familiar na prestação. Pode-se escolher um terreno no condomínio horizontal, como o exemplo a seguir, através da planta do loteamento que visualiza a distribuição de todos os lotes, das áreas de lazer e as ruas.



Um dos motivos de escolha, de uma família, em optar por um "condomínio horizontal" é porque ele já oferece o projeto e construção da casa, porém tem a obrigatoriedade em pagar a taxa de condomínio. Seja qual for a opção de comprar um terreno, se deve ter um projeto da planta da casa.

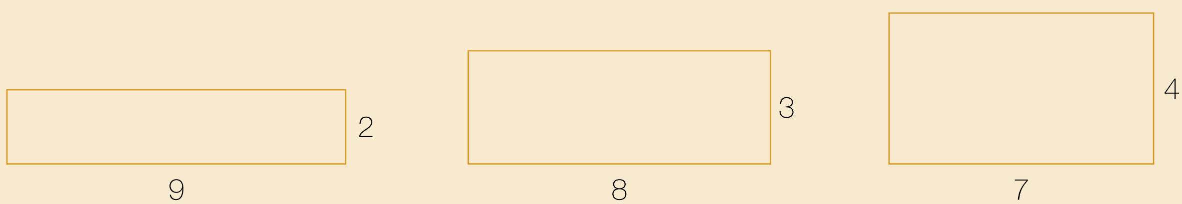
No loteamento fechado, a construtora disponibiliza alguns modelos de planta e estabelece algumas normas e padrões para a casa. A área útil da casa a ser construída não pode ultrapassar 50% do terreno e planeja a quantidade de material de construção evitando o desperdício. Deve-se ter um engenheiro que desenhe a planta da casa, estime o material a ser comprado e execute o projeto.

Qual será a possível área da casa?

Algumas casas podem ser construídas observando a relação entre as diversas áreas e perímetros com diferentes formatos. Para melhor compreensão dessas relações vamos resolver a atividade a seguir, onde trará opções de escolha para o formato da casa.

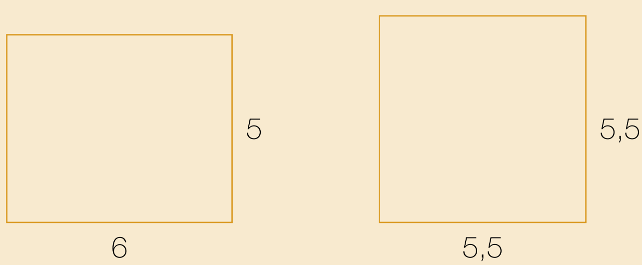
ATIVIDADE

A seguir veremos alguns quadriláteros, com suas dimensões em metros, visualizando a relação entre algumas áreas e um mesmo perímetro. O perímetro será representado por "P" e a área por "A".



P = 22m e A = 18m² | P = 22m e A = 24m² | P = 22m e A = 28m²

a) Continue você agora!



P = e A = | P = e A =

b) Em um sistema cartesiano, desenhe os retângulos de mesmo perímetro, de modo a base de cada retângulo fique apoiada sobre o eixo x, com um de seus vértices coincidindo com a origem. Em seguida, una os pontos formados pelos vértices opostos ao vértice que está na origem.

c) Qual é a sentença que relaciona a medida da base com a altura de todos os retângulos de mesmo perímetro?

Os fatores importantes na execução do projeto são: análise topográfica do terreno, área útil da casa, dimensões da casa, materiais utilizados na obra. Seguindo alguns padrões, pode-se ter uma construção segura, estável, econômica e com qualidade.

As forças que atuam na estrutura podem comprometer a construção, devido: ao peso das paredes e do telhado; à variação da temperatura que faz com que dilate a estrutura. A distribuição dessas forças devem ser incluídas no projeto. O tamanho da casa necessita de um planejamento que distribua as colunas e vigas que a sustentarão. Inicialmente, deve-se tomar uma decisão sobre o formato e a área dessa casa.

ATIVIDADE

Suponha que a área se mantenha sempre com 64 m². Desenhe alguns retângulos com base e altura diferentes.

a) Preencha a tabela:

Retângulo	Base (m)	Altura (m)	Área (m²)	Perímetro (m)
A				
B				
C				
D				
E				

b) Observe a tabela e descreva como as medidas dos lados desses retângulos variam entre si.

c) Construa, em um plano cartesiano, esses quadriláteros, com a base apoiada no eixo x e a altura no eixo y, com um vértice que coincida com a origem do sistema. Nenhum retângulo deve totalmente recobrir o outro. Depois, una todos os vértices opostos ao vértice que está na origem.

d) Qual é a sentença que relaciona a medida da base com a altura de todos os retângulos de mesma área?

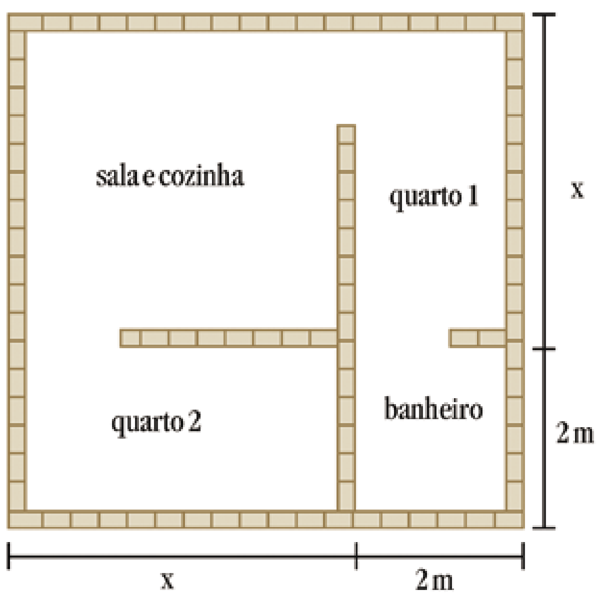
e) No gráfico, ao observar a união dos vértices opostos ao da origem, podemos identificar a linha que representa a relação entre as grandezas. Essa linha indica grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?

DEBATE

O que podemos concluir em relação ao perímetro e área, conforme variam os lados dos quadriláteros?

A possível área da casa é uma escolha entre muitas possibilidades. Ao verificar a variação da área e o perímetro dos quadriláteros, percebe-se que a área máxima obtida é quando temos um quadrado. Se o objetivo é economizar material, o quadrado é o formato ideal, aproveitando maior área.

Após a decisão pelo formato e área da casa, pode-se planejar as dimensões das paredes externas e as divisões internas. Essas divisões internas deverão ser posicionadas de maneira que se obtenha uma economia de material e se tenha os principais cômodos de uma casa, como quarto, sala, cozinha e banheiro. Veja, a seguir, um modelo:

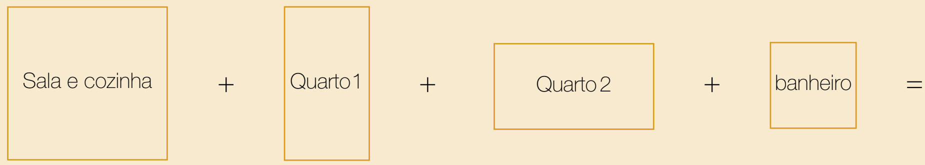


ATIVIDADE

a) Quais são as expressões algébricas que representam a área dos cômodos da casa do modelo anterior?

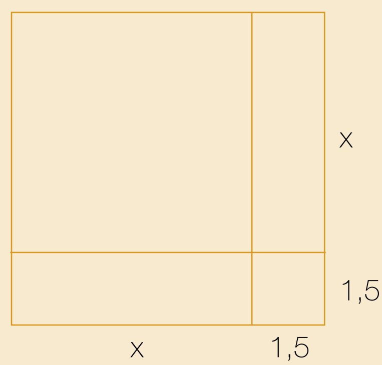
Cômodo	Lado	Lado	área
Banheiro			
Quarto 1			
Quarto 2			
Sala e cozinha			

b) Somando as áreas de cada cômodo da casa, teremos a área total da casa. Qual é essa área?



x.x + __________ + ________________ + ____________ =

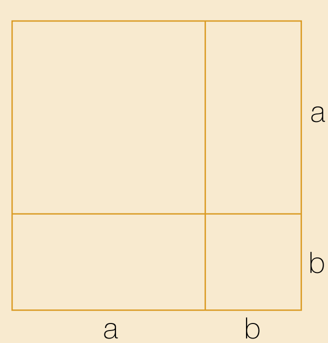
c) Se a planta dessa casa tem um formato quadrado e as dimensões dos lados forem x + 1,5, qual é a área da casa?



d) Utilizando o produto notável, complete a tabela, conforme variam as medidas:

lado	lado	produto	área
x + 3	x + 3	(x+3).(x+3)	
2x + 2	2x + 2		
3x + 1,5	3x + 1,5		
3x + 2	3x + 2		

e) Considerando que as medidas da planta da casa, representadas por a e b, formam um quadrado de área A, qual é a expressão dessa área?



f) A expressão apresentada no item anterior é um polinômio de qual grau?

g) Considere que as medidas da planta da casa, representadas por a e b, formam um quadrado de perímetro igual a 32 m, e que a diferença entre a e b é 2 m. Obtenha as medidas e calcule a área da casa.

h) Monte uma tabela da relação entre as medidas dos lados da casa que formam um quadrado com sua respectiva área, utilizando medidas entre 6 m e 9 m.

lado	área

Os loteamentos especiais que podem ser denominados por "condomínio horizontal" ou "loteamento fechado" são implantados sem que haja um normativo adequado, federal ou mesmo local, regulamentado de seus aspectos urbanísticos. Esses condomínios diferenciam-se dos convencionais, pois as áreas de domínio público têm utilização privativa dos seus moradores.

Durante as negociações de compra e venda do imóvel, deve-se esclarecer aos futuros proprietários as diferenças entre condomínio e loteamento, os quais têm instituições jurídicas diferentes.

Veja a tabela corporativa:

Condomínio Horizontal	Loteamento Fechado
Regido pela Lei dos Condomínios (4591/64) até 2003, quando entra em vigor o Código Civil.	Regido pela Lei dos Loteamento (6766/79)
O fechamento do condomínio é legal.	O fechamento do loteamento é proibido pela lei 6766/79. Porém, muitas prefeituras concedem o direito de fechamento e o registro é com a concessão de direito real de uso referente as ruas, praças, áreas de lazer e locais reservados a prédios públicos.
O incorporador vende o terreno com a casa e fração ideal sobre as áreas comuns.	O incorporador vende os lotes. Não há "áreas comuns" nem "fração ideal".
Moradores pagam taxa de condomínio estabelecido no momento da compra do imóvel.	Podem constituir uma associação de moradores.
Tem um síndico.	Pode ter um administrador.
A cobrança da taxa é realizada de acordo com a lei dos condomínios.	Uma taxa de manutenção pode ser cobrada a partir da existência de uma associação.
O pagamento da taxa condominial é obrigatório.	A obrigatoriedade da taxa de manutenção é juridicamente controversa.
As ruas internas estão sujeitas ao Código Brasileiro de trânsito. Por exemplo os menores não podem dirigir carros.	Idem.

A observação de diferentes perímetros e áreas permitem mostrar que existe relação de dependência entre as variáveis. Na planta da casa temos uma representação da distribuição dos cômodos que devem ser proporcionais as paredes, ou seja, ao perímetro e à área da casa. A integração de um conteúdo matemático com uma situação real de compra da casa, por exemplo, pode contribuir com a tomada de decisão sobre o tamanho da casa de acordo com a necessidade de sua família.

Qual é a taxa do condomínio?

A segunda preocupação dos moradores é a taxa do condomínio, que deve estar dentro do orçamento doméstico. Existem algumas leis do condomínio que são estabelecidas, em reuniões entre os proprietários, na busca da organização das áreas comuns (os limites de horários para utilização da churrasqueira e parque de recreação) e as despesas (manutenções, reformas e contrato de funcionários). O síndico será o representante dos moradores e não se pode esquecer que a taxa do condomínio horizontal é obrigatória.

ATIVIDADE

Supomos que um condomínio possui um total de 30 terrenos à venda. A construtora realizou uma pesquisa com uma administradora de condomínios e fez uma estimativa do custo de R$100,00 por cada casa construída e mais R$10,00 por cada terreno não vendido. A construtora irá cobrir os gastos mínimos do condomínio nos primeiros meses. Após a venda de uma certa quantidade de terrenos e construção das casas, será iniciada a cobrança da taxa do condomínio. Um síndico pode organizar essa cobrança ou uma administradora.

a) Preencha a tabela a seguir:

Número de casas	Número de Terrenos não vendidos	Custo do condomínio para cada casa (R$)	Valor total arrecadado (R$)
30	0	100	$30 \cdot 100 = 3\,000$
29	1	$100 + 1 \cdot 10 = 110$	$29 \cdot 110 =$
28	2	$100 + 2 \cdot 10 = 120$	$28 \cdot 120 =$
27	3	$100 + 3 \cdot 10 =$	
26	4		
25	5		
24	6		
23	7		

b) Qual é a relação entre o número de terrenos não vendidos e o total arrecadado pelo condomínio?

c) Aumentando o número de terrenos não vendidos, como se comporta o valor total? Complete e analise a situação.

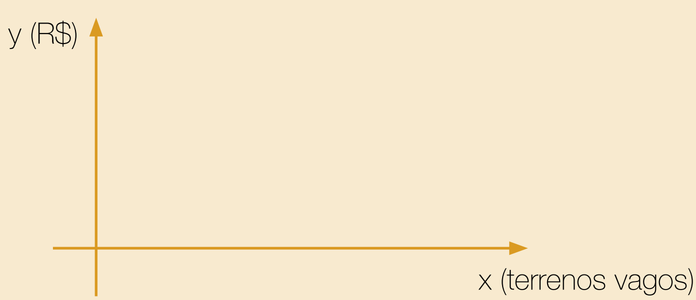
- Nenhum terreno não vendido: $(30 - 0) \cdot (100 + 10 \cdot 0) = 30 \cdot 100 = 3\,000$
- Um terreno não vendido: $(30 - 1) \cdot (100 + 10 \cdot 1) = 29 \cdot 110 = 3\,190$
- Cinco terrenos não vendidos:
- Dez terrenos não vendidos:
- Quinze não vendidos:
- Vinte não vendidos:
- Vinte e cinco não vendidos:
- Trinta não vendidos:

d) Para qual número de casas o valor de taxas de condomínio arrecadado é máximo?

e) Ao representar o número de terrenos vagos por x, qual a expressão algébrica obtida do valor total arrecadado?

f) Se o valor total do condomínio for representado por y em função de x terrenos vagos, qual é a relação dessas variáveis? Escreva a expressão.

g) Represente em um plano cartesiano o gráfico dessa situação.



h) Como é chamada essa curva?

i) Qual o número de casas pagando o condomínio, para que cubra os gastos mínimos de R$ 3 510,00? Quais são os possíveis valores desse condomínio?

A taxa de condomínio deve ser estabelecida na compra do imóvel; dessa forma, a atividade dos valores do condomínio em função do número de casas pode esclarecer aos futuros moradores se essas despesas estão dentro do seu orçamento.

É necessário que se estabeleça regras para o condomínio, as quais serão cobradas dos moradores pelo síndico. Você conhece ou mora em um condomínio? Já observou essas regras ou leis?

Alguns condomínios estabelecem uma multa caso algum morador não cumpra uma regra. Os horários de mudança também são estabelecidos para facilitar a movimentação dos móveis, de maneira que não perturbem a vida dos outros moradores.

Obras Consultadas

GIDDENS, A. **Sociologia**. Tradução: Sandra R. Netz. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 3ª ed. v. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

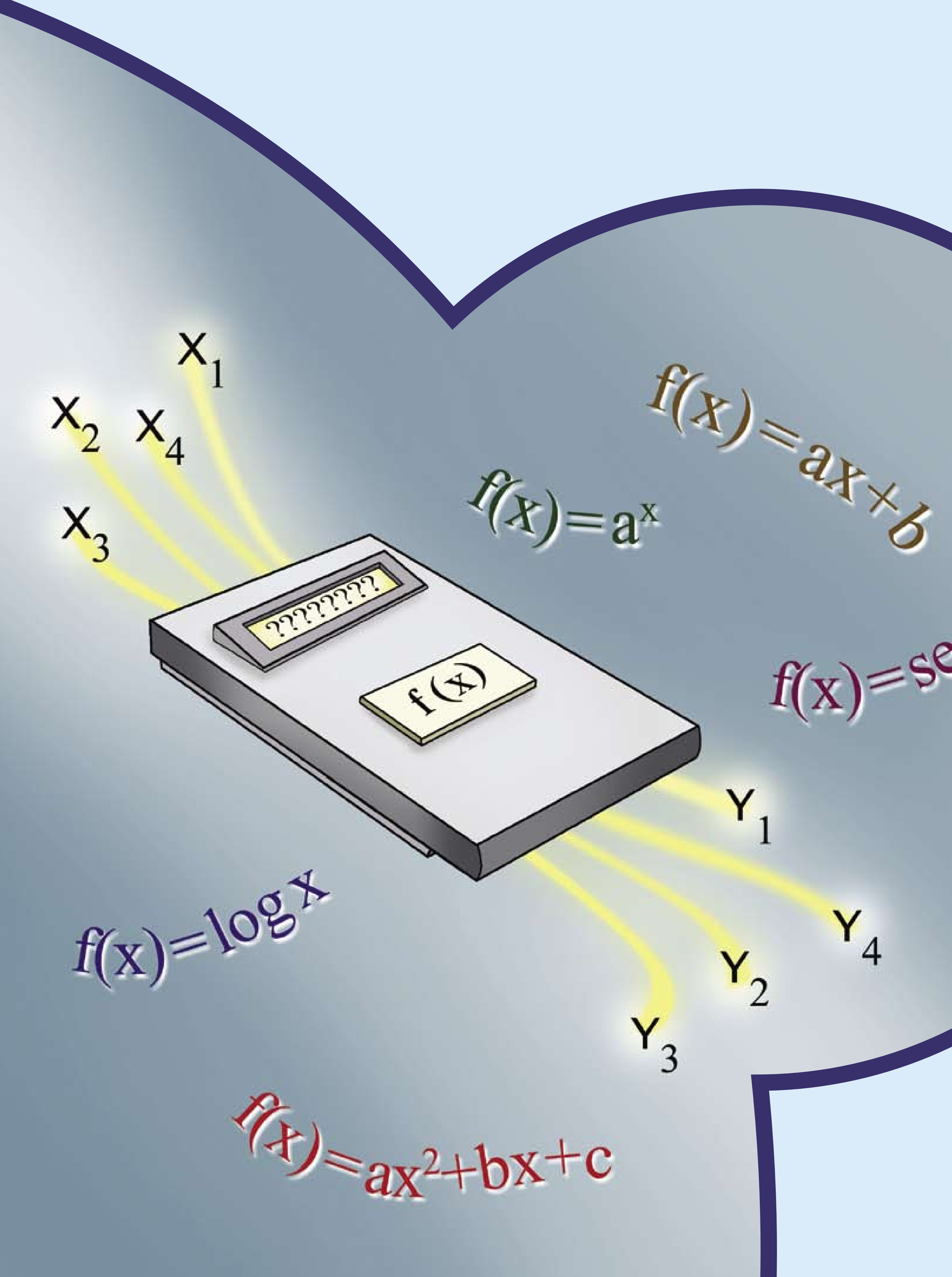
Documentos Consultados *ONLINE*

Estatuto das Cidades. **Lei nº 10257, de 10 de julho de 2001**. Disponível em: <http://www.paranacidade.org.br>. Acesso em: 19 abr. 2006.

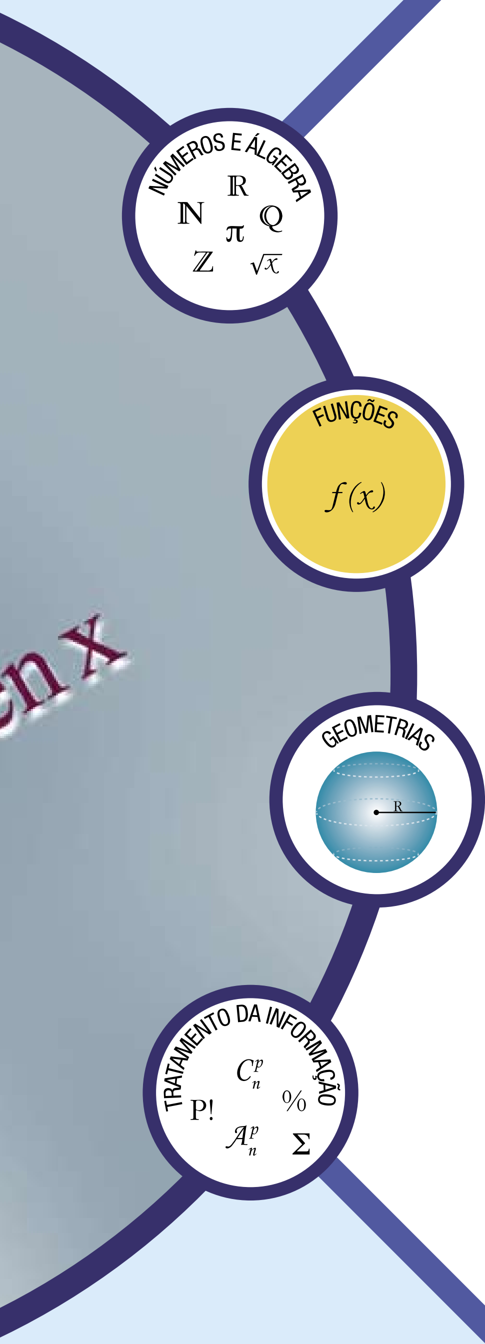
Lei Federal sobre o parcelamento do solo. **Lei nº 6766, de 19 de dezembro de 1979**. Disponível em: <http://www.consumidorbrasil> . Acesso em: 19 abr. 2006.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES



x_1
x_2
x_4
x_3
$f(x)=ax+b$
$f(x)=a^x$
??????????
f(x)
f(x)=se
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$

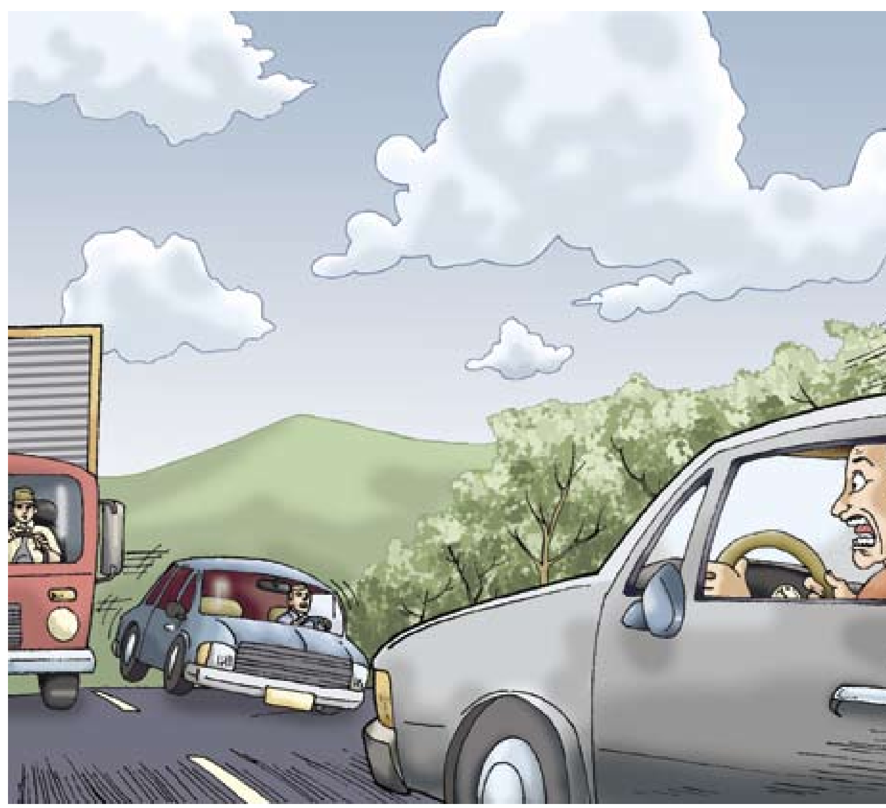


4

RISCOS DE ACIDENTES E EXPECTATIVA DE VIDA

Neusa Idick Scherpinski Mucelin[1]

- Vem vindo um carro de lá pra cá!
- Vai dar pra passar!
- Vem vind. . . .



Uma ultrapassagem é sempre um momento em que o motorista precisa fazer uma série de avaliações. Elas são feitas rapidamente: qual a velocidade do carro que vamos ultrapassar? Nosso motor "agüenta puxar" para passar à frente? Vem vindo um carro no sentido inverso? Ainda assim, dará tempo?

[1]Colégio Estadual João Manoel Mondrone - EFM -Medianeira - PR

Sabe-se, a partir de pesquisas e estatísticas, que o consumo de álcool altera a percepção do espaço, do tempo e a capacidade de visão.

Pense: se alguém bebeu um pouco a mais, provavelmente irá achar que pode ultrapassar quando não pode? Ou achará que não pode, quando pode?

Em outras palavras... Alguém que bebe é ou não imprudente?

Isso não é fácil de responder. Você faz alguma idéia de quanto podemos errar na avaliação de velocidades? Aliás, **você faz idéia de quanto a ingestão de bebida alcoólica pode afetar a capacidade de percepção do ser humano?**

Antes de tentar resolver o problema, precisamos de algumas informações. É importante conhecer uma resposta para essa pergunta, pois mais de 1.000 brasileiros morrem, por ano, vítimas de acidentes causados por excesso de álcool. Cerca de 10% de todos os acidentes com vítimas resultam de dirigir com excesso de álcool no sangue. Por incrível que pareça, esses acidentes são provocados por aquelas razões que as pessoas julgam "agradáveis" quando ingerem bebidas que apresentam algum teor alcoólico: estas bebidas dão a sensação de segurança, causam euforia, mas, também, diminuem o controle muscular e a coordenação motora e, como já dissemos, prejudicam a habilidade de avaliar velocidades, distâncias; reduzindo a acuidade visual e a capacidade de lidar com o inesperado (ALCOOLISMO, 2005).

Pesquisas feitas nos Estados Unidos têm mostrado que o risco de acidentes automobilísticos cresce **exponencialmente** com a quantidade de bebida alcoólica ingerida. Mas o que isto significa? O que quer dizer "cresce exponencialmente"? Isso significa que "cresce muito"? Cresce "mais" do que alguma outra coisa? Ou cresce "menos"?

Uma coisa é certa, se uma pessoa bebe um copo, o efeito é menor que se beber dois copos, e ainda menor do que se beber três copos... Isso quer dizer que há uma relação entre o número de copos de bebida alcoólica ingeridos e o quanto ela afeta. Podemos dizer, por exemplo, que nossa capacidade visual fica alterada em função da quantidade de álcool no nosso sangue. Mas como avaliar essa situação usando a idéia de que um fenômeno ocorre em "função" de algum ou alguns fatores? E, como juntar estas duas coisas: estar em "função" de algum fator e "crescer exponencialmente"?

Pode-se dizer que uma "função" é uma **lei que regula a dependência entre as variáveis**. Alguém diz: "irei ao parque SE não chover". Ou: "em função da chuva, não irei ao parque". A condição do clima é uma variável: pode chover, pode fazer sol, pode garoar ou o tempo ficar nublado...

No caso que estamos tratando, a lei que regula a ação do álcool no organismo é descrita por uma expressão matemática. Apesar dos numerosos estudos sobre a história da matemática, não é fácil encontrar informações sobre a origem do estudo das funções. As noções sobre esse conceito foram evoluindo na Idade Média, porém não apresentava a forma e notação atual. Entretanto, pode-se dizer que, no período moderno, a evolução da idéia de funções teve melhor detalhamento no século XVII com os trabalhos de Galileu Galilei, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz.

DEBATE

Você tem idéia do que seja a definição de função nos livros de matemática? Acha que a definição que é utilizada hoje é semelhante àquela que foi criada pelos matemáticos que acabamos de citar?

A função especial, que vamos estudar nesse texto, é a **função exponencial**, ela tem uma grande importância devido ao campo de aplicações nas mais variadas áreas das ciências, como no comportamento de fenômenos físicos, biológicos e sociais. Existem casos que a função exponencial apresenta comportamento de crescimento e, em outras situações, seus resultados - sejam eles algorítmico ou gráfico - revelam decrescimento.

Tanto na matemática como em outras ciências, este conteúdo específico desempenha papéis fundamentais. Como exemplo, podemos citar algumas ciências e a respectiva aplicação da função exponencial.

Na Física, aplica-se a Lei de resfriamento dos corpos. Na Química, o conceito de desintegração radioativa pode ser explicado através desta função. A Geografia busca na Matemática, por meio da função exponencial, explicações e previsões sobre o crescimento populacional. Já os Economistas encontram no estudo das funções exponenciais um meio propício para abordar dados referentes ao mundo dos negócios, entre eles, o mercado financeiro com o cálculo de juros compostos e, no mercado de compra e venda de automóveis, para explicar a depreciação dos veículos no decorrer do tempo.

Aqui, neste trabalho, vamos explorar dois temas importantes do nosso cotidiano: o crescimento populacional brasileiro e os riscos de acidente de trânsito por consumo de bebidas alcoólicas.

Para estudar os riscos de acidente por consumo de álcool, Bassanezi (2004) se baseou em uma experiência realizada nos Estados Unidos, com 86 indivíduos, cuja massa corporal estava na média de 72 kg, e os indivíduos estavam sem comer há 2 horas.

Para a ingestão de vinho, Bassanezi construiu a tabela ao lado:

Riscos de acidente R_i (%)	Vinho ingerido α_i *(cálices)*	Teor alcoólico no sangue (%)
1,0	0	0
7,3	8,5	0,100
20	12,0	0,140
35	14,6	0,166
48,5	15,0	0,174

Fonte: BASSANEZI, p. 275

Os riscos de acidente R_i e o teor alcoólico no sangue estão representados em porcentagem %.

De acordo com a tabela anterior, você saberia dizer qual seria o risco de acidente após a ingestão de 2 cálices de vinho para estes indivíduos da pesquisa? E de 5 cálices?

Experimente representar os valores da tabela num plano cartesiano. Considere o número de cálices de vinho ingerido como sendo x e o risco de acidente como sendo y.

Que sentido terá unir os pontos representados mediante uma curva?

É possível completar a tabela dando valores negativos ao número de cálices de vinho? O que isso significa?

Existe uma fórmula que permita conhecer o risco de acidente por cálices de vinho ingeridos?

Se associarmos o risco de acidente a uma determinada concentração de álcool no sangue, como calcularemos esse risco se o motorista consumir um cálice a mais ou a menos? Você pode chegar a uma conclusão, mas será que essa conclusão se aplicaria para qualquer pessoa? Para debater sobre essa questão, lembre-se de que os efeitos do álcool variam de intensidade de acordo com as características pessoais.

Muitas vezes o estudo da matemática pode auxiliar na resolução de problemas. E este é um dos casos mais importantes. Para responder algumas das questões acima sobre os riscos de acidente por ingestão de álcool e o crescimento populacional, uma maneira é estudar o comportamento das funções. Na prática, elas estão relacionadas com situações de diversas áreas, que envolvem dependência entre grandezas.

Você sabia que uma forma de entender o comportamento de uma função é através da sua representação gráfica? Os gráficos permitem observar os intervalos entre os estados das variáveis em estudo.

Vamos descobrir um pouco mais sobre o comportamento das funções?

ATIVIDADE

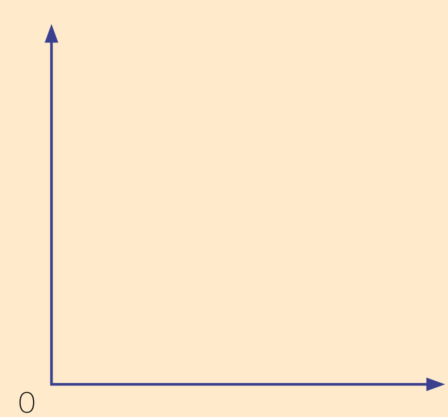
Para entender o comportamento de uma função exponencial, experimente construir num mesmo plano cartesiano o gráfico das seguintes funções:

$f(x) = 2x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = 2^x$

Qual delas pode ser denominada como função exponencial? Como denomina-se as outras funções?

Qual das três funções cresce mais rapidamente? E qual cresce mais lentamente?

Que tipo de variação ocorre na primeira função? E na segunda e terceira?



Agora que você já descobriu um pouco mais sobre a forma gráfica da função exponencial, que tal retornar aos questionamentos do problema sobre o risco de cometer acidentes por ingestão alcoólica.

Mas como é possível determinar a lei de formação de uma função?

Bassanezi (2004) mostra que existe uma função que relaciona riscos de acidente e ingestão por bebida alcoólica e que esta é uma função exponencial, dada por:

$$R(\alpha) = ae^{b\alpha}$$

Temos o significado de cada variável:

- a e b são constantes da função.
- α é a variável que representa a quantidade de cálices de vinho ingerida.
- $R(\alpha)$ é o risco de acidente em função do número de cálices de vinho ingeridos.
- e é o número de Euler e é a base para a definição dos logaritmos naturais. O número e é irracional e seu valor aproximado é 2,718.

Os valores das constantes encontradas por Bassanezzi (2004) foram: a = 0,9525 e b = 0,2528, que, substituídos na função, resulta:

$$R(\alpha)=0{,}9525e^{0{,}2528\alpha}$$

Agora fica fácil responder aqueles questionamentos, vamos ver!

Para quem bebe 1 cálice de vinho, temos:

$$R(1)=ae^{b\cdot 1} = 0{,}9525e^{0{,}2528\cdot 1} = 1{,}226\%.$$

Assim, podemos dizer que o risco de acidente para um indivíduo, com massa corporal em média de 72 kg, conforme a pesquisa, que bebe 1 cálice de vinho é de 1,226%.

ATIVIDADE

Com base na tabela, construa o gráfico da função $R(\alpha) = 0{,}9525e^{0{,}2528\alpha}$ .Utilize papel milimetrado e aproximação de duas casas decimais.

$\alpha = 1 \Rightarrow e^{0{,}2528.1} = 1{,}2876$

$\alpha = 2 \Rightarrow e^{0{,}2528.2} = e^{0{,}5056} = 1{,}6579$

$\alpha = 3 \Rightarrow e^{0{,}2528.3} = e^{0{,}7584} = 2{,}1348$

$\alpha = 4 \Rightarrow e^{0{,}2528.4} = e^{1{,}0112} = 2{,}7488$

$\alpha = 5 \Rightarrow e^{0{,}2528.5} = e^{1{,}264} = 3{,}5395$

Caso possua uma calculadora científica, investigue como utilizá-la para obter os valores expressos na tabela.

E como determinar se é seguro dirigir?

Contando que um indivíduo responsável não deve correr um risco maior que 2 %, isto é $R(\alpha) \leq 2$, o que implica em:

$$0{,}9525e^{0{,}2525\alpha} \leq 2$$

Isso é igual a 2,934 cálices = 352,13 ml ou aproximadamente a 3 cálices de vinho.

ATIVIDADE

No estudo de uma função, dizemos que uma variável é dependente e outra independente. Você saberia dizer qual é dependente e qual é independente neste caso? E qual é o domínio desta função? E a imagem?

Mas, no entanto, os acidentes de trânsito não são a única conseqüência do consumo de álcool. Na verdade, muitas são as conseqüências físicas como, por exemplo: doenças no fígado como hepatite alcoólica (inflamação no fígado) e a cirrose (dano permanente ao fígado); inflamação no estômago e no esôfago podendo causar enjôos, vômitos e até sangramentos; doenças no coração como arritmia e conseqüentes derrames; impotência sexual; além de muitas outras doenças. É importante salientar que pessoas que fazem uso excessivo do álcool têm uma probabilidade maior de desenvolver doenças cancerígenas..

O efeito agudo do álcool no organismo humano é dividido em duas fases distintas, sendo uma estimulante e outra depressora. Nos primeiros momentos podem aparecer os efeitos estimulantes, como: euforia, desinibição e loquacidade (maior facilidade para falar). Com o passar do tempo, começam a aparecer os efeitos depressores, como: falta de coordenação motora, descontrole e sono. Quando o consumo é muito exagerado, o efeito depressor fica exacerbado, podendo até mesmo provocar o estado de coma (BEBIDAS ALCOÓLICAS, 2005).

Você sabe o que diz a legislação brasileira sobre o consumo de álcool antes de dirigir um automóvel?

Como já dissemos anteriormente, a ingestão de álcool, mesmo em pequenas quantidades, diminui a coordenação motora e os reflexos, comprometendo a capacidade de dirigir veículos ou operar outras máquinas. Pesquisas revelam que grande parte dos acidentes são provocados por motoristas que haviam bebido antes de dirigir. A legislação brasileira (Código Nacional de Trânsito, que passou a vigorar em Janeiro de 1998) diz que deverá ser penalizado todo o motorista que apresentar mais de 0,6 gramas de álcool por litro de sangue. A quantidade de álcool necessária para atingir essa concentração no sangue é equivalente a beber cerca de 600 ml de cerveja (duas latas de cerveja ou três copos de chopp) ou 200 ml de vinho (duas taças) ou 80 ml de destilados (duas doses) (ÁLCOOL E TRÂNSITO, 2005).

Expectativa de vida:

É o cálculo estimado de quantos anos em média se espera que uma pessoa sobreviva em determinado local. É calculado levando em conta, além dos nascimentos e obituários, o acesso à saúde, educação, cultura e lazer, bem como a violência, criminalidade, poluição e situação econômica do lugar em questão.

O consumo de álcool pode influenciar na expectativa de vida do brasileiro, por conta dos inúmeros acidentes automobilísticos e outras doenças e conseqüências decorrentes do consumo desta droga.

Segundo o IBGE, em 2003, a expectativa de vida do brasileiro subiu para 71,3 anos, mas poderia ser bem maior se houvesse menos mortes violentas por causas externas, como homicídios e acidentes.

Ao considerar que no Japão a vida média já é superior a 81 anos, a esperança de vida no Brasil de pouco mais que 71 anos ainda é relativamente baixa. E, de acordo com a projeção mais recente da mortalidade, somente por volta de 2040 o Brasil estaria alcançando o patamar de 80 anos de esperança de vida ao nascer. Atualmente, o Brasil ocupa 86ª posição no ranking da ONU, considerando as estimativas para 192 países ou áreas no período 2000-2005.

DEBATE

Pesquise e discuta com seus colegas e professores sobre:

- quais são as variáveis que determinam a expectativa de vida do povo de um país?
- Será que a expectativa de vida das diferentes Regiões do Brasil é a mesma? Sugestão: construa um mapa com a expectativa de vida de cada Região do Brasil.
- E entre as diferentes classes sociais há a mesma expectativa de vida? Por quê?

ATIVIDADE

Os dados sobre expectativa de vida brasileira de 1980 a 2003 podem ser observados no quadro a seguir:

PERÍODO	AMBOS OS SEXOS	HOMENS	MULHERES
1980	62,6	59,7	65,7
1991	66,9	63,2	70,9
2000	70,5	66,7	74,4
2003	71,3	67,6	75,2

Adaptado de IBGE, 2006.

Qual foi o aumento de expectativa de vida da população de 2003 em relação a 2000? Em relação à população masculina, qual foi o aumento? E feminina?

DEBATE

Quais ações são necessárias para garantir um aumento significativo na expectativa de vida brasileira nos próximos anos?

Considerando que a taxa de natalidade é igual para ambos os sexos, quais são os motivos da expectativa de vida dos homens ser inferior a das mulheres?

Segundo o Jornal da Ciência (2006), a expectativa de vida brasileira mostra que, entre 2002 e 2003, os brasileiros ganharam 0,3 ano de expectativa de vida ao nascer, mas que a alta mortalidade de homens jovens impede um maior crescimento. Um rapaz de 25 anos de idade tem 3,79 vezes mais chances de morrer do que uma moça da mesma idade. O mais preocupante é que a diferença está aumentando: em 2002, as chances eram 3,67 vezes maiores.

Um estudo divulgado pelo boletim da Organização Mundial de Saúde – OMS - mostra um quadro ainda pior para consumidores compulsivos. Interessados em estabelecer uma relação entre a freqüência de consumo de álcool e a taxa de mortalidade entre homens e mulheres. Os Pesquisadores investigaram 7.172 pessoas na Rússia. Estas forneceram informações sobre idade, estado vital e hábitos de consumo de álcool relativos a 10.475 parentes masculinos e 3.129 femininos. Segundo artigo publicado no Boletim da Organização Mundial de Saúde de novembro de 2005, todas as causas de morte masculina foram relacionadas ao consumo de álcool, tanto ao consumo habitual quanto ao compulsivo. Entretanto, nas mulheres, a mortalidade apresentou-se maior apenas no grupo das que bebiam em excesso pelo menos uma vez ao mês (COSTA, 2006).

Outra pesquisa avaliou episódios de homicídios e acidentes de trânsito com óbitos na cidade de Londrina - PR. A relação com o álcool se mostrou significativa. Das vítimas de homicídio submetidos ao exame toxicológico, 22% estavam sob o efeito do álcool e, entre os óbitos por acidentes de trânsito, essa porcentagem foi ainda maior, chegando a 40% (PEIXOTO, 2004).

Para entender melhor essa situação, podemos realizar uma abordagem matemática, partindo do crescimento populacional do Brasil. Para tanto, considere que estatisticamente os dados sobre a população brasileira no último século estão distribuídos da seguinte forma:

Observe, a tabela a seguir:

Ano	nº de habitantes
1900	17 438 434
1920	30 635 605
1940	41 165 289
1950	51 941 767
1960	70 070 457
1970	93 139 037
1980	119 002 700
1991	146 825 475
2000	169 590 693

IBGE- 2005

DEBATE

Quais são as expectativas de crescimento populacional no Brasil?

As condições básicas como saúde, educação, alimentos, moradia, segurança, saneamento básico e lazer também crescem na mesma proporção que o crescimento populacional?

Pesquisas têm mostrado que o crescimento populacional no mundo todo aumenta **exponencialmente** com o tempo. Uma coisa é certa, dependendo da população estudada, algumas crescem mais que outras devido a vários fatores, como: distribuição de rendas, educação, cultura, religião e política.

Como calcular o crescimento populacional de nosso país e fazer previsões futuras para os próximos 10 anos, ou 50, ou quem sabe 100 anos? Já sei o que você irá dizer, "eu não estarei aqui para conferir se as contas estão certas daqui a 100 anos". Bom, você não precisa ir tão longe.

ATIVIDADE

Baseado na tabela, sobre crescimento populacional do Brasil, construa um gráfico que mostre a evolução da população brasileira entre 1900 e 2000. Para facilitar a construção do gráfico, você pode usar papel milimetrado.

No eixo horizontal, use cada centímetro para representar 10 anos, e no eixo vertical, cada centímetro para representar 20 milhões de brasileiros (Adaptado de Funções Exponenciais e Logarítmicas: da história às aplicações de Carmen Kaiber da Silva – Universidade Luterana do Brasil – ULBRA).

Como seria este gráfico se, a cada década, a partir de 1900, a população tivesse crescido, em número de habitantes, o mesmo que cresceu de 1900 a 1920?

Quais as diferenças apresentadas nos dois gráficos a respeito do crescimento populacional em função do tempo? Discuta os resultados.

O que isso tem a ver com funções exponenciais?

Observe que usamos valores inteiros para o tempo em anos, mas se quisermos obter os números de população a cada mês ou a cada hora? Ou a cada minuto? E até mesmo a centésimos de segundos? Neste caso, teríamos tantos pontos, e tão próximos, que poderíamos traçar uma linha contínua passando por estes pontos.

Com o auxilio deste gráfico, você já pode fazer previsões sobre o nosso crescimento populacional. Então, quantos somos hoje aproximadamente em número de população no Brasil? Quantos seremos no ano de 2020?

Sugestão:

Para responder essas questões, você pode, por exemplo, desenhar uma curva passando pelos pontos marcados no papel milimetrado. Prolongue esta curva até a margem superior da folha. Para calcular os valores de população para os próximos anos, basta projetar uma reta *r* perpendicular ao eixo *x* no ano em que estamos até cortar a curva. Marque este ponto como sendo A. Em seguida, trace outra reta *s*, perpendicular a *y*, passando pelo ponto A. O ponto de intersecção do eixo *y* com a reta *s* será o valor correspondente em população para este ano. Repetir o processo para 2020.

DEBATE

E para 2050 e 2100, seria possível fazer as projeções de crescimento da população brasileira com base apenas neste gráfico? Por quê?

ATIVIDADE

1. Considere que num país havia uma população de 50 milhões de habitantes há 10 anos. Esse país apresenta uma taxa de crescimento anual de 1,5% ao ano. Qual é a expressão matemática que possibilita fazer previsões futuras para esta população caso seja mantida a mesma taxa de crescimento? Monte uma tabela que mostre a evolução da população ano a ano e, a partir desta, construa o gráfico cartesiano. Determine o domínio e a imagem desta função.

2. A eliminação de droga pelo organismo (Adaptado de Funções Exponenciais e Logarítmicas: da história às aplicações de Carmen Kaiber da Silva – Universidade Luterana do Brasil – ULBRA) também apresenta comportamento exponencial. Veja o exemplo: uma medicação é ministrada por via intravenosa em um sujeito. A medicação é levada pelo sangue aos órgãos que a absorvem ou eliminam. Suponha que a cada hora a medicação se reduza a 1/4 da quantidade presente.

Encontre uma expressão matemática que indique, a cada hora x, a quantidade de medicação presente.

Se a quantidade de medicação ministrada é 40 g, como fica esta expressão matemática? Construa o gráfico.

Pergunta-se:

A função é crescente ou decrescente? Justifique.

3. Esboce os gráficos das funções $y = 2^x$, $y = 3^x$ e $y = 4^x$, e num mesmo plano cartesiano e descubra propriedades comuns às três funções.

DEBATE

Debata com seus colegas e professores sobre o consumo de bebidas alcoólicas. Procure ater para as conseqüências sociais.

Expresse sua idéia sobre as influências do consumo de álcool no crescimento populacional desordenado.

Referências Bibliográficas

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 2ª ed. São Paulo: Contexto, 2004.

SILVA, C. K. **Funções Exponenciais e Logarítmicas**: da história às aplicações. Universidade Luterana do Brasil – ULBRA.

Obras Consultadas

CARNEIRO, V. C. **Funções elementares**: 100 situações-problema de matemática. Porto Alegre: Universidade, 1993, 134 p.

CANDIDO, S. L. **Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções**. Educação Matemática em revista, n. 8, p. 47-56, ano 7.

FLORIANI, J. V. **Função logarítmica**. 2ª ed. Blumenal: Editora Furb, 2000.

GIMÉNEZ, C. C. PIQUET, J. D. **Funciones y gráficas**. Madri: Síntesis, 1990. 176p.

TIPLER, A. P. **Física:** gravitação, ondas e termodinâmica. Tradução: Horácio Macedo. v. 2, 3ª ed. São Paulo: LTC, 2004. 300 p.

Documentos Consultados *ONLINE*

ATLAS SÓCIO ECONÔMICO DO RIO GRANDE DO SUL. **EXPECTATIVA DE VIDA**. Disponível em: <http://www. scp. rs. gov. br/atlas/atlas. asp?menu=311>. Acesso em: 24 mai. 2006.

ALCOOLISMO, **Risco e efeito**. Disponível em: http://www. ufrrj. br/institutos/it/de/ acidentes/etanol1. htm>. Acesso em: 05 ago. 2005.

ALCOLISMO. Disponível em: http://www. ufrrj. br>. Acesso em: 03 out. 2005.

ÁLCOOL E TRÂNSITO. Disponível em: < http://www. unifesp. br>. Acesso em: 10 out. 2005.

BEBIDAS ALCOÓLICAS: **Efeitos agudos**. Disponível em: < http://www. soropositivo. org. Acesso em: 01 nov. 2005.

COSTA, M. A. **Uso do álcool aumenta a mortalidade em homens**. Disponível em: <http://www. antidrogas. com. br>. Acesso em: 25 mai. 2006.

ENSINO MÉDIO: **Funções Exponenciais**. Disponível em: < http://pessoal. ser comtel. com. br>. Acesso em: 10 set. 2005.

IBGE. **Tábuas Completas de Mortalidade** – 2003. Disponível em: < http://www. ibge. gov. br/>. Acesso em: 25 mai. 2006.

IBGE. **Tábuas Completas de Mortalidade** – 2003. Disponível em: < http://www. ibge.gov. br>. Acesso em: 25 mai. 2006.

JORNAL DA CIÊNCIA, **Expectativa de vida**: 71,3 anos. Disponível em: <http:// www. jornaldaciencia. org. br>. Acesso em: 24 mai. 2006.

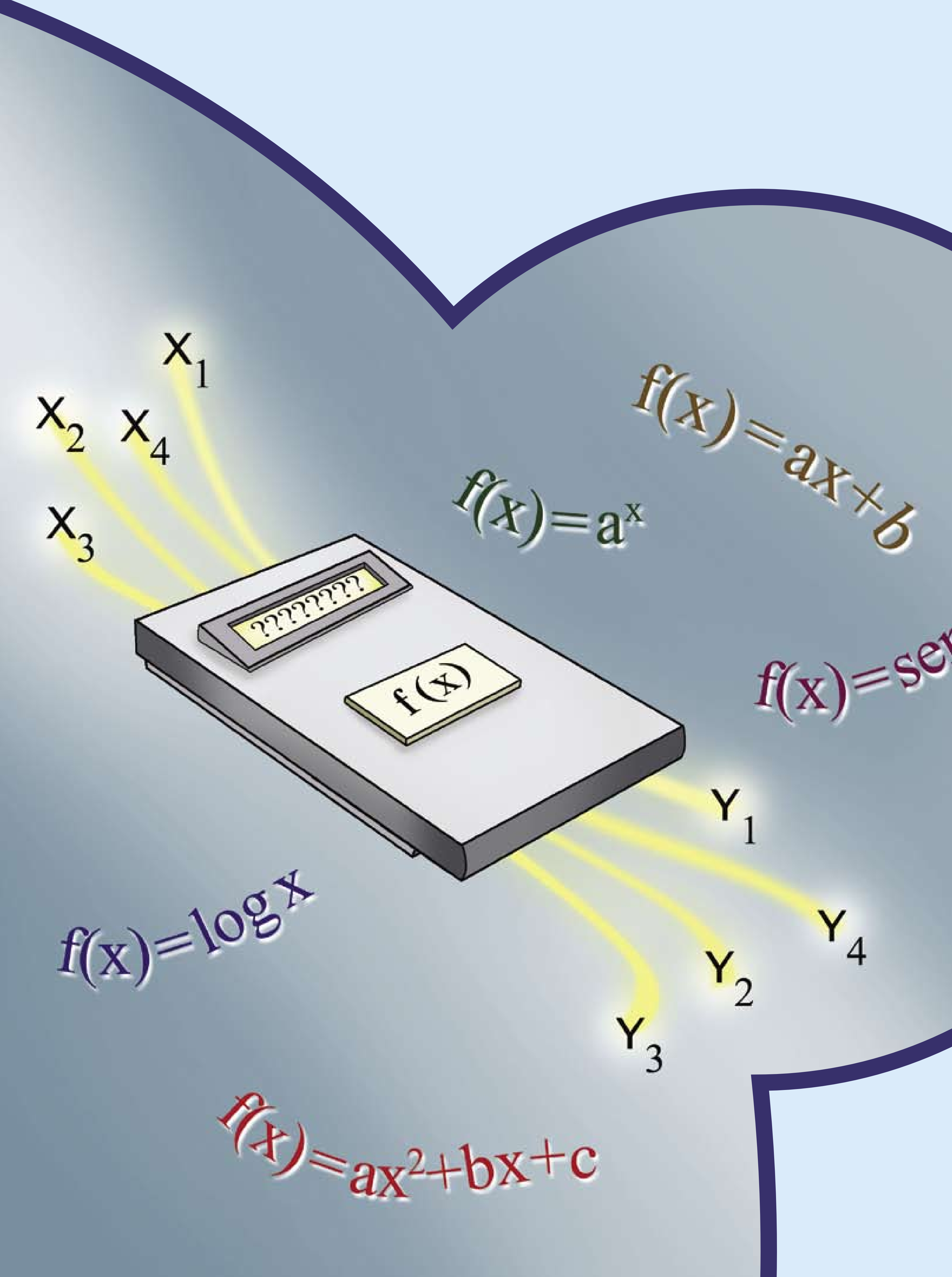
LEÓN, M. L. **Acidentes de trânsito, um problema de saúde pública**. Disponível em: < http://www. unicamp. br>. Acesso em: 03 out. 2005.

MAROT, R. **Alcoolismo**. Disponível em < http://www.psicosite.com.br/tra/drg/alcoolismo.htm >. Acesso em 20 nov. 2007.

MENDES, S. CARMO, R. VENÂNCIO, C. **Função exponencial**. Disponível em: <http://www. educ. fc. ul.pt>. Acesso em: 01 nov. 2005.

PEIXOTO, R. B. **Uso do álcool aumenta a mortalidade em homens**. Disponível em: <http://www. antidrogas. com. br>. Acesso em: 24 mai. 2006.

WIKIPÉDIA. **Expectativa de vida**. Disponível em: <http://pt. wikipedia. org>. Acesso em: 24 mai. 2006.



X_1
X_2
X_4
X_3
??????????
f(x)
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$

MATEMÁTICA, MÚSICA E TERREMOTO, O QUE HÁ EM COMUM?

Neusa Idick Scherpinski Mucelin[1]

Quem não gosta de curtir uma música num final de tarde? No carro, na balada, no quarto, e se o professor deixar, até na sala de aula em alguns momentos os alunos escutam música!

Mas, o que a música tem a ver com terremoto? Não é o barulho!

[1]Colégio Estadual João Manoel Mondrone - EFM - Medianeira - PR

Você pode não acreditar, mas a música e os terremotos têm algo em comum. O som causa nas pessoas tanto sensações boas como ruins. O incômodo causado por um ruído é muito subjetivo. Um ruído intenso de uma porta batendo com o vento ou duas laminas de aço se tocando causa pavor e até arrepios em algumas pessoas; já o simples gotejar de uma torneira, à noite, incomoda o sono de qualquer pessoa.

E o barulho dos alunos falando ao mesmo tempo numa sala de aula incomoda?

PESQUISA

Qual é o limite suportável do som no ouvido humano? Que tal medir o barulho tolerável numa sala de aula? Ou num ambiente de trabalho?

Mas os sons quando harmônicos e com certa intensidade também provocam sensação de prazer.

PESQUISA

O que provoca sensação de prazer quando ouvimos uma música?

Que tipo ou gênero de música que você mais gosta?

Tem alguma música que te deixa alegre? E triste? Por quê?

O que faz os sons produzirem efeitos nos sentimentos?

A música é uma das artes mais populares do nosso planeta. Mas, o que pouca gente sabe, é que por trás de um chorinho, ou de uma complexa sinfonia de Bach ou Villa-Lobos, existem relações matemáticas que ajudam a formar, ao lado da criatividade dos homens, o edifício sonoro da nossa música.

Os sons utilizados para compor músicas constituem a escala musical. Quando combinados de determinadas formas, podem produzir resultados agradáveis aos nossos ouvidos. Mesmo que você não toque nenhum instrumento, já ouviu falar das notas musicais dó, ré, mi, fá, sol, lá, si. Estas sete notas e mais cinco auxiliares (os bemóis e sustenidos) compõem a base da música ocidental.

Mas, qual é a relação da matemática com a música?

Por que relacionar matemática e música?

Um pequeno conjunto de notas musicais era conhecido como série harmônica, com suas freqüências agradáveis e audíveis aos seres humanos. Pitágoras, que viveu no século VI a.C., esticou uma corda e analisou o som produzido através de sua vibração. Descobriu que ao dividir a corda ao meio, a vibração do som era a mesma da produzida com a corda inteira, mas uma oitava acima, produzindo um som mais agudo. A partir desta experiência, Pitágoras estabeleceu várias relações, como o intervalo de quinta que por ser o mais consonante da série, foi a base para a construção da maior parte das escalas musicais existentes no mundo.

Em 1635, Mersenne propôs um sistema de afinamento suave, conhecido como escala temperada. Neste sistema é necessário que as relações de freqüência de quaisquer meio-tons adjacentes sejam constantes. Mas isto só foi aceito a partir das composições de O Cravo Bem Temperado, que foi composto de 1722 a 1744 por Bach (ABDOUNUR, 1999).

Mas quem foi Bach?

O compositor alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750) é considerado o precursor da músia moderna e um dos principais compositores de todos os tempos. Ele percebeu que os sons das notas músicas podem ser mais, ou menos, agradáveis conforme a maneira com que as notas são agrupadas. Veja, por exemplo, a escala de sete sons conhecidos: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si. A escolha da separação dos sons nestas 7 partes é considerada agradável. A proposta da escala temperada era a de dividir a escala musical em 12 partes, doze sons que fossem agradáveis ao ouvido e à alma (NASCIMENTO, 2005).

Esta escala apresenta todos ou quase todos os intervalos ligeiramente imprecisos, porém não distorcidos.

Como?

O sentido temperado refere-se ao tempero igual em que se divide o intervalo de uma oitava em 12 semitons associados às relações de freqüências exatamente iguais. O temperamento não ocorreu como um processo repentino, se desenvolveu de diversas maneiras ao longo do tempo.

A escala temperada foi dividida desta forma:

NOTA	DÓ	DÓ#	RÉ	RÉ#	MI	FÁ	FÁ#	SOL	SOL#	LÁ	LÁ#	SI	DÓ
Temperado	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	2
Escala Pitagórica	1/1		9/8		5/4	4/3		3/2		5/3		15/8	2/1

Fonte: adaptado de NASCIMENTO (2005)

Observe que a tabela tem 13 espaços e não 12. São 13 porque o último Dó está uma oitava acima do primeiro, ou seja, é um Dó mais agudo. Neste caso, após 12 intervalos a freqüência dobra, pois a altura do som é caracterizada pela freqüência da onda sonora.

Um som de pequena freqüência é grave, e um som de grande freqüência é agudo. Por isso que o primeiro DÓ corresponde ao número 1 e o último, ao número 2, isto é, dobrou.

Mas, qual é a relação da escala temperada com os logaritmos?

Vamos realizar algumas operações matemáticas com uma nota da escala temperada, a nota SOL, por exemplo:

$$\text{SOL - } 2^{\frac{7}{12}} = ?$$

Para entendermos melhor, lembremos que a operação de potenciação nada mais é do que multiplicar o número, que chamamos de base, tantas vezes quanto for o expoente, resultando na potência em si, neste caso específico temos: 2 é a base, $\frac{7}{12}$ é o expoente e, o resultado desta operação, $\frac{7}{12}$ é a potência.

Quando se conhece a base e o expoente, facilmente obtêm-se a potência mas, nesse caso o expoente é a fração $\frac{7}{12}$. Vamos consultar a tabela 1 para verificar o valor de $2^{\frac{7}{12}}$.

Assim, teremos $2^{\frac{7}{12}} = 1{,}4983...$

Mas, podem ocorrer situações onde tenha-se que descobrir qual é o expoente. Nesse caso a pergunta seria: a qual expoente deve-se elevar o número dois para que se obtenha a potência igual a 1,4983...? Matematicamente, pode-se escrever:

$2^x = 1{,}4983...$

que é uma equação exponencial, cuja a variável está no expoente **x** e quando varia-se o valor de **x**, tem-se uma função exponencial.

Tabela 1

$$2^{1/12} = \sqrt[12]{2} = 1{,}0594...$$
$$2^{2/12} = \sqrt[12]{2^2} = 1{,}1224...$$
$$2^{3/12} = \sqrt[12]{2^2} = 1{,}1892...$$
$$2^{4/12} = \sqrt[12]{2^4} = 1{,}2599...$$
$$2^{5/12} = \sqrt[12]{2^5} = 1{,}3348...$$
$$2^{6/12} = \sqrt[12]{2^6} = 1{,}4142...$$
$$2^{7/12} = \sqrt[12]{2^7} = 1{,}4983...$$
$$2^{8/12} = \sqrt[12]{2^8} = 1{,}5874...$$
$$2^{9/12} = \sqrt[12]{2^9} = 1{,}6817...$$
$$2^{10/12} = \sqrt[12]{2^{10}} = 1{,}7817...$$
$$2^{11/12} = \sqrt[12]{2^{11}} = 1{,}8877...$$

A função logarítmica realiza uma operação inversa da função exponencial.

$\log_2 1{,}4983... = \frac{7}{12} \leftrightarrow 2^{\frac{7}{12}} = 1{,}4983...$

Veja que a base 2 do logaritmo é a base da potência, o logaritmo $\frac{7}{12}$ é o expoente da potência e o número 1,4983... chamado de logaritmando é o valor da potência. Genericamente:

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

onde,

- b é a base do logaritmo e a é a base da potência;
- a é o logaritmando e o valor da potência;
- x é o logaritmo e o expoente da potência.

ATIVIDADE

Observe que as 12 notas da escala temperada pode ser explicada utilizando logaritmos de base 2, por exemplo, 2^0, $2^{1/12}$, $2^{2/12}$...

Transforme todas as potências correspondentes as notas da escala temperada na forma logarítmica, sendo $f(x) = \log_2 x$

A grande semelhança existente entre as notas destas escalas também ocorre entre seus sons.

A divisão das notas musicais em logaritmos na escala temperada possibilitou a construção de instrumentos com maior amplitude sonora e a formação de grupos musicais maiores, como os das grandes orquestras e até mesmo em consertos de Rock. Antes deste novo afinamento, os espetáculos musicais eram limitados e só algumas pessoas tinham o privilégio de ouvir música, ocorriam em ambientes pequenos e fechados e, na maioria das vezes, somente a Igreja e os Nobres tinham acesso.

Os logaritmos surgiram a partir da necessidade do homem de resolver problemas relacionados aos números muito grandes - como os que encontramos ao estudar astronomia - ou números muito pequenos - como os que aparecem no estudo das moléculas. A fim de facilitar operações de multiplicação e divisão entre os números, foram desenvolvidas as teorias sobre logaritmos. A criação dos logaritmos é atribuída ao matemático John Napier, em 1614.

Vários fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos e diversas leis matemáticas são relacionados com os logaritmos, o que torna seu estudo de grande importância. Atualmente, o estudo dos logaritmos pode ser auxiliado por meio de calculadoras científicas e outros recursos computacionais.

A aplicação da função logarítmica ocorre em fenômenos que crescem muito lentamente. No cotidiano, freqüentemente, precisamos comparar a velocidade de crescimento de dois ou mais fenômenos, como, por exemplo: quando se pretende medir a variação da intensidade do barulho de um debate numa sala de aula, ou quando se pretende verificar o barulho provocado pelos automóveis numa rua de tráfego intenso em uma cidade.

Essas comparações tornam-se mais fáceis quando sabemos comparar a velocidade de crescimento de funções simples, como as funções polinomiais e exponenciais já conhecidas. Como por exemplo:

$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = \log x$, $y = e^x$.

ATIVIDADE

Para perceber as variações das funções exponencial e logarítmica, vamos construir o gráfico das funções, sendo:

$y = 2^x$, para $x = 0, 1, 2$ e 3

$y = \log_2 x$, para $x = 1, 2, 4$ e 8

O que ocorre com os valores das funções à medida que x vai aumentando?

Comparando as linhas que representam a função exponencial e logarítmica, o que você observa?

Na função $y = \log_2 x$, o que acontece para $x = 0$?

Para poder detectar os sons, o ouvido possui um mecanismo bastante complexo, que envolve ossículos, cavidades e milhares de nervos. O elemento principal na detecção das oscilações dos sons é a “cóclea”, uma pequena estrutura em espiral que atua seletivamente. Ao longo dela, existem milhares de fibras nervosas que agem como sensores, e transferem ao cérebro a percepção das oscilações e intensidade dos sons. E é essa característica exata da percepção do som pelo ouvido que faz com que a Música seja uma arte mais baseada em condições fisiológicas do que em psicológicas (RATTON, 2005).

A intensidade do som captada pelo ouvido corresponde à sensação denominada popularmente de volume do som. Quando o som tem uma intensidade mínima, ou seja, o som mais fraco que o ouvido humano pode captar, é chamado de limiar de audição. Quando a intensidade é elevada, o som provoca uma sensação dolorosa. A intensidade mínima a que um som provoca sensação dolorosa tem o nome de limiar da dor.

ATIVIDADE

Para perceber a onda sonora, o tímpano humano necessita que ele tenha no mínimo intensidade física corresponde a 10^{-12} w/m^2 (potência por área), a chamada limiar de audibilidade, e, no máximo, de até 1 w/m^2 para a limiar da dor.

A grandeza nível sonoro obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por:

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Em que I é a intensidade do som e I_0 é um nível de referência definida por convenção internacional, que é utilizada como o limiar da audibilidade.

A unidade mais utilizada é o decibel (dB) em homenagem a Alexandre Graham Bell (1847-1922), que inventou o telefone.

Em decibéis (dB), como fica o limiar da audição?

E o limiar da dor (dB)?

Os sons muito intensos são desagradáveis ao ouvido humano. Sons com intensidades acima de 130 dB provocam uma sensação dolorosa e sons acima de 160 dB podem romper o tímpano e causar surdez.

Nas festas de finais de ano ou quando um título é conquistado pelo nosso time favorito é comum algumas pessoas estourarem fogos de artifícios, como forma de comemoração. Você já observou o que ocorre com os cães durante o estouro ensurdecedor dos fogos de artifícios?

Por que será que eles se incomodam tanto com o barulho?

Qual é a freqüência sonora dos cães?

Você sabia que alguns animais são capazes de perceber os ultra-sons, que é um som com uma freqüência superior àquela que um ser humano pode perceber? Por esse motivo, é comum o uso de cães para detectar a presença de invasores, pois eles conseguem ouvir sons não detectados pelo ouvido humano.

PESQUISA

Pesquise sobre as freqüências sonoras de cães e outros animais.

O ouvido tem a característica de responder aos estímulos sonoros não de uma forma linear. Se uma fonte sonora dobra a potência emitida, o ouvido não percebe que o aumento foi o dobro.

ATIVIDADE

A intensidade sonora de um cãozinho latindo é de $3{,}18 \times 10^{-6}$ w/m^2 numa distância de 5 metros. Qual será o nível de intensidade do latido?

Foto: Icone Audiovisual

Foto: Icone Audiovisual

E se dois cãezinhos estiverem latindo ao mesmo tempo, será que o nível de intensidade também dobra?

Faça as contas.

Quando se dobra a intensidade do som, não se dobra o nível de intensidade, explique por que ocorre esse fato.

PESQUISA

Quais devem ser os cuidados numa sala de aula, em ambientes de trabalho e na vida cotidiana para que o som não prejudique a nossa audição e o nosso humor?

Quando o som é considerado poluição sonora?

Você sabe o que diz a lei municipal da poluição sonora no seu município?

Procure saber mais a respeito desta lei. Ela é adequada? Por quê?

A tabela a seguir apresenta os níveis de intensidade de algumas fontes sonoras comuns em dB.

FONTE	dB	Descrição
	0	Limiar da audição
Respiração normal	10	Quase inaudível
Sussurros de folhagens	20	
Murmúrio (5 m)	30	Muito silencioso
Biblioteca	40	
Escritório tranqüilo	50	Silencioso
Conversação normal	60	
Tráfego pesado	70	
Fábricas em geral	80	
Caminhão pesado	90	Prejudicial a audição
Ronco de uma pessoa dormindo	?	
Metrô antigo	100	
Construção civil (3 m)	110	
Concerto de rock (2 m)	120	Limiar da audição dolorosa
Metralhadora	130	
Decolagem de um jato	150	
Motor de um foguete de grande porte	180	

FONTE: Adaptado de TIPLER, 1984.

ATIVIDADE

Observando a tabela anterior, responda:

a) Qual é aproximadamente a intensidade sonora dos ruídos normais da sua sala de aula?

b) Quantas vezes a intensidade do som de uma banda de rock é superior à intensidade de uma conversação normal?

c) Qual é o limite do som tolerável numa sala de aula?

Mas afinal de contas, o que o som tem em comum com terremotos? Calma, já chegamos lá!

Em 8 de outubro de 2005, foi registrado um terremoto de 7,6 graus na escala Richter no Sul da Ásia. Pelo menos 39.422 pessoas mortas, 65.038 feridos e muitas cidades completamente destruídas no norte do Paquistão. Na Índia e Afeganistão houveram, pelo menos, 800 vítimas fatais. Com uma estimativa de 2,5 milhões de pessoas desabrigadas, o terremoto também danificou estradas e pontes que bloqueiam o acesso para muitas das cidades atingidas. Esse foi o segundo terremoto de grande escala registrado na Ásia em menos de um ano.

As aplicações dos logaritmos são utilizadas para descrever fenômenos cujas medições são muito grandes, muito pequenas, ou que se situam em intervalos com uma amplitude muito grande. Um desses fenômenos é o sismo que ocorre em um terremoto. A energia liberada por um sismo no seu epicentro é medida pelos sismólogos em uma escala, a escala de Richter, definida pela seguinte equação:

$$M = 0{,}67 \log_{10} E - 7{,}9$$

A letra E, na fórmula anterior, representa a energia liberada e M corresponde a magnitude na escala de Richter.

Em 1976, um terremoto de 8,9 na escala de Richter atingiu a Guatemala matando 23 000 pessoas. Qual foi a energia liberada pelo terremoto?

Se a energia liberada por um sismo for 10 vezes maior que a do outro, qual é a diferença entre as respectivas magnitudes?

A escala Richter, utilizada para medir a magnitude dos terremotos, é baseada nos logaritmos de base 10. As medidas das intensidades de terremotos crescem exponencialmente. Isso significa dizer que se x é a magnitude de um terremoto, então a intensidade é de $Y = 10^x$.

O quadro a seguir apresenta alguns terremotos registrados ao longo do tempo na escala Richter:

Local e data	Escala Richter
São Francisco, 1906	8,3
Argentina, 1922	8,5
Chile, 1960	9,5
México, 1985	8,1
São Francisco, 1989	7,1
Irã, 1990	7,3
Sudeste Asiático, 2004	9,0
Chile, 2005	7,9
Sul da Ásia e Paquistão, 2005	7,6

Baseado nos dados acima compare a intensidade dos terremotos de São Francisco, de 1989, com o do terremoto do Sul da Ásia, em outubro de 2005.

Compare também a intensidade do terremoto do Irã, de 1990, com o ocorrido no Chile, em 2005.

E então, já descobriu o que terremotos e música têm em comum?

Que tal agora ouvir uma boa música para alimentar a alma!

Referências Bibliográficas

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: escrituras editora, 1999. 333 p.

NASCIMENTO, M. **Matemática com prazer**. Disponível em: < http://www. geocities.com>. Acesso em: 20 set. 2005.

RATTON. M. **Música e matemática**. Disponível em: < http://www.tvebrasil. com.br>. Acesso em: 18 nov. 2005.

Obras Consultadas

CARNEIRO, V. C. **Funções elementares**: 100 situações-problema de matemática. Porto Alegre: Universidade, 1993, 134 p.

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Ganabara, 1984. v. 2, 587 p.

BOYER, C. **História da matemática**. São Paulo: ed. USP, 1974.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1989, 415 p.

FLORIANI, J. V. **Função logarítmica**. 2ª ed. Blumenal: Editora Furb, 2000.

GIMÉNEZ, C. C.; PIQUET, J. D. **Funciones y gráficas**. Madri: Síntesis, 1990. 176p.

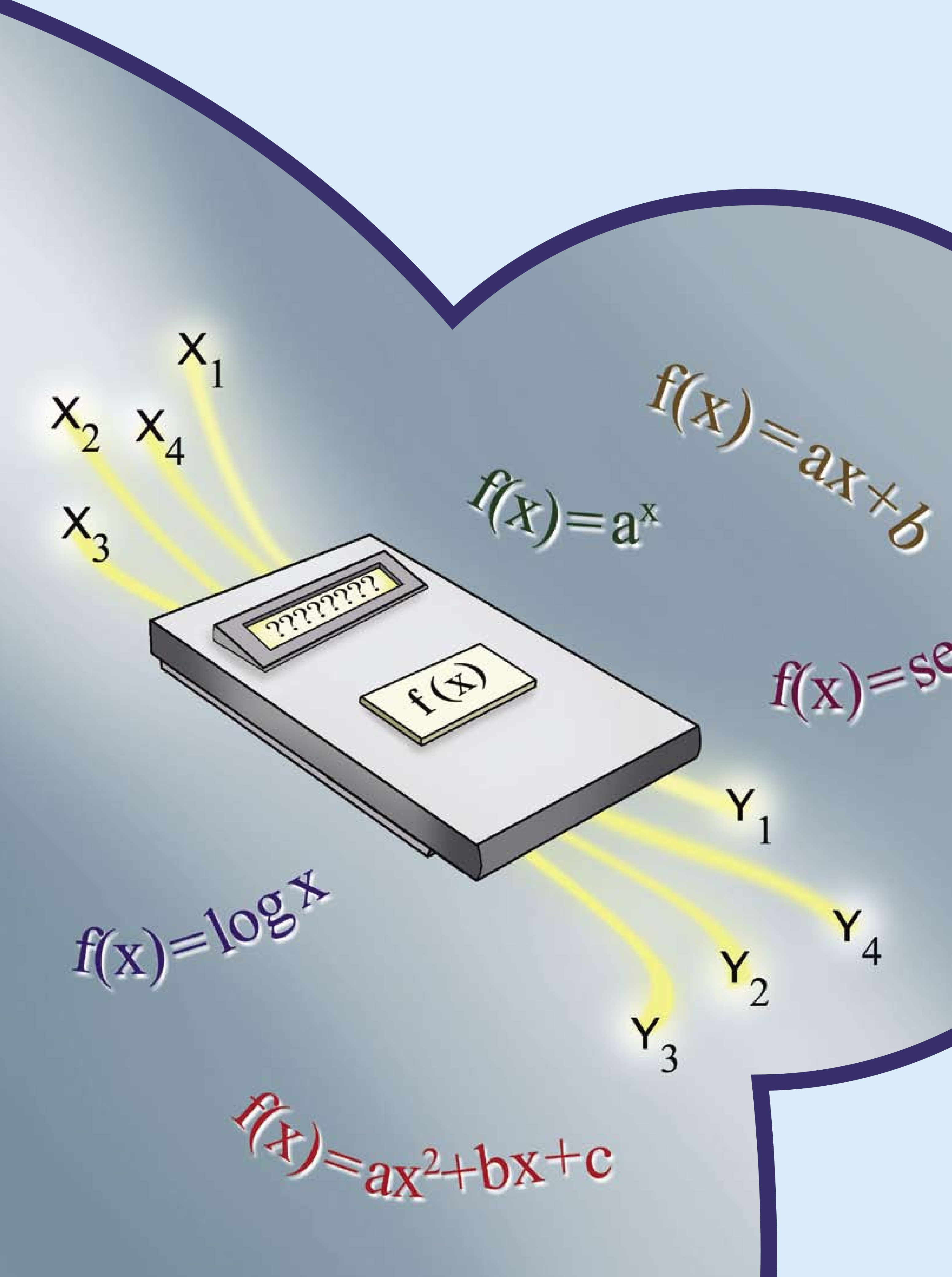
LIMA, E. L. **Logaritmos**: coleção do professor de matemática. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM 1996. 107 p.

MIORIM, M. A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMAT, 2002.

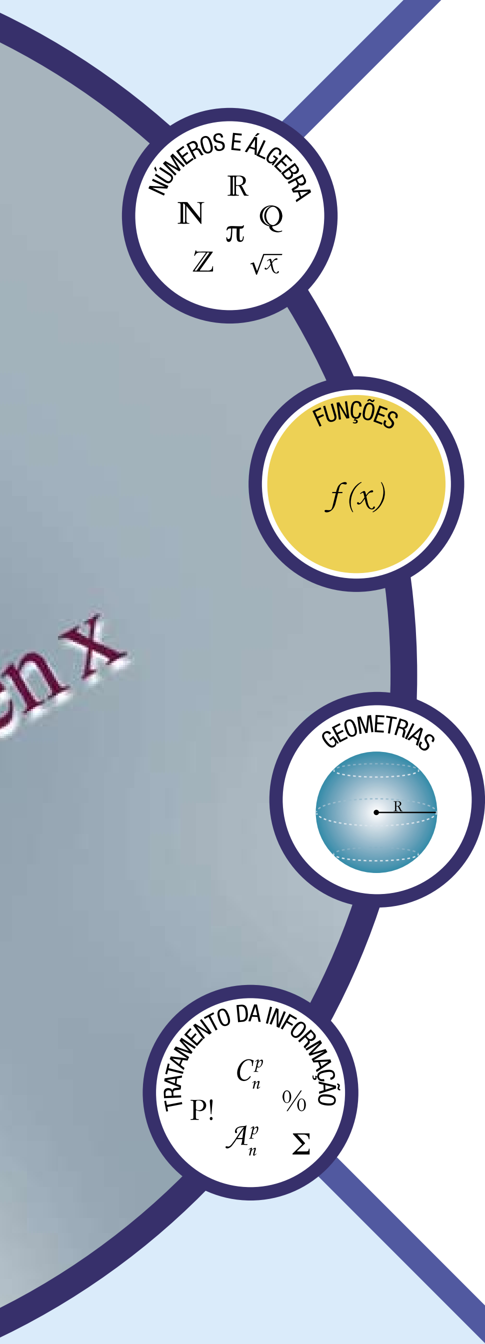
WISNIK, J. M. **O Som e o sentido**: Uma Outra História das Músicas. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.

Documentos Consultados *ONLINE*

MAIA, A. **Música e matemática**: uma antiga relação. Disponível em: < http:// www. comciencia.br>. Acesso em: 19 nov. 2005.



x_1
x_2
x_4
x_3
????????
f(x)
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
$f(x)=log\,x$
$f(x)=ax^2+bx+c$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3



6

$$$ CORRUPÇÃO & POLÍTICA – QUEM MEXEU NO MEU BOLSO! $$$

Claudia Vanessa Cavichiolo[1]

Como compreender a brutal diferença entre o salário da maioria dos trabalhadores brasileiros e os extraordinários valores que ficaram conhecidos como “mensalões”?

[1]Colégio Estadual Professor Lysímaco Ferreira da Costa - PR

No ano de 2005, o Brasil se deparou com uma crise política gerada pelo escândalo do "mensalão". Saiu nas principais manchetes de jornais e telejornais de todo o país, denúncias feitas pelo ex-presidente do PTB, Roberto Jefferson, sobre supostas mesadas pagas a parlamentares do governo, o "mensalão". Cifras gigantescas são mencionadas nestas denúncias, como por exemplo, mesadas de 30, 40 e até 50 mil reais, conforme o político que as recebe. Muitos brasileiros, simples assalariados, se revoltaram, pois seus salários estavam muito longe de se compararem com as gordas mesadas citadas na mídia. Mesmo que seus salários tivessem um aumento progressivo, levaria muitos anos para chegarem lá! E ainda, segundo um artigo de jornal,

> [...] 4 milhões de reais que foram repassados ao deputado Roberto Jefferson e que seria parte do financiamento da campanha de seu partido (PTB) em 2004, porém Jefferson recusou-se dizer o que fez com todo esse dinheiro. (Jornal Gazeta do Povo, 23 de junho de 2005, p. 17).

Estas crises políticas abalam a população, muito porque em sua grande maioria são trabalhadores assalariados, e estes, mesmo que levassem uma vida inteira trabalhando, não atingiriam a menor das cifras citadas acima, causando revolta por parte de uma grande maioria, assalariados brasileiros.

Outro fato que também gera revolta, é que, em meio a tudo isso, o povo não sabe aonde realmente se encontra a verdade e, nos estudos sobre a História da Política Brasileira, ela aparece muitas das vezes, somente depois de 3 ou 4 décadas. Evidentemente, existem situações em que os acontecimentos que entram para a História, são esclarecidos, tão logo acontecem, um exemplo é o impeachment do ex-presidente Fernando Collor de Mello.

Porém nem sempre o caminhar da História é tão rápido assim, haja visto que em alguns casos, a complexidade dos fatos e a obscuridade em que acontecem , demandam muito trabalho de pesquisa por parte dos historiadores, em busca de documentos que comprovem sua veracidade.

Há também o papel da mídia, que através da divulgação, fomentam a discussão política entre as pessoas, gerando mais cobrança por parte da população, porém ao deixar de noticiar os acontecimentos, o véu do esquecimento recai sobre nação.

Em março de 1990, Collor, eleito pelo povo, toma posse na Presidência. Seu discurso era baseado na moralidade administrativa e no markenting pessoal – juventude e modernidade. Dois anos depois, a credibilidade de Collor despenca em função dos escândalos de corrupção no governo. Estudantes saem às ruas para exigir o impeachment (FIGUIREDO, 2000).

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Fernando_Collor_de_Mello

A Matemática e a História se entrelaçam tecendo uma rede onde prendem-se muitas verdades que quando analisadas, podem ser detectadas sem que precisemos aguardar tanto tempo para que os historiadores nos revelem o que realmente aconteceu em uma determinada época.

A matemática por ter o poder de nos levar à compreensão do mundo e das estruturas econômicas de uma sociedade, através dos números, e dentre outras coisas, nos faz perceber se estamos sendo lesados economicamente em qualquer situação e, a História, porque nos instiga à reflexão crítica, quer seja sobre fatos passados como os atuais, pois estes fazem parte da construção histórica da humanidade, e dessa forma podemos nos posicionar como cidadãos conscientes e ativos dentro da sociedade.

DEBATE

Com relação ao caso do “mensalão”, será que é um daqueles acontecimentos históricos em que sua veracidade só será comprovada daqui a muitas décadas? Você acha, que quando a mídia para de divulgar escândalos na política, como esse, as pessoas deixam de pensar sobre o assunto? Será que nós, brasileiros, somos um povo sem memória política? Justifique.

Vamos agora fazer a confirmação de alguns fatos importantes para a nossa compreensão e que nos levará a refletir sobre a realidade de maioria dos brasileiros. Em especial, vamos estabelecer uma situação fictícia que diz respeito à conquista do primeiro emprego.

Suponha que um jovem com 18 anos ingressou em seu primeiro emprego e, na entrevista de admissão, seu empregador estabeleceu o seguinte contrato de trabalho:

Salário inicial: R$ 400,00

Aumento: anualmente seu salário terá um aumento de R$ 100,00.

Observamos que se o aumento é de R$ 100,00, formará a seguinte seqüência com os salários desse jovem: 400, 500, 600, 700,...

Observamos também que esse aumento é constante e podemos verificar, com isso, que se subtrairmos o 2° salário pelo 1º ou, o 3° pelo 2° e, assim por diante, teremos sempre o mesmo valor, que é de 100 reais, justamente o aumento anual do jovem.

Veja:

2º salário - 1º salário = 500 – 400 = 100

3º salário - 2º salário = 600 – 500 = 100

4º salário - 3º salário = 700 – 600 = 100

...e assim sucessivamente...

Então podemos dizer que a seqüência formada pelos salários possui uma particularidade: o valor do aumento é constante e, a partir de agora, chamaremos a esse aumento de razão (r) da seqüência que representa o salário do jovem, juntamente com os aumentos. E isso vale para todas as seqüências que possui a razão constante.

Vamos agora analisar mais uma particularidade desse tipo de seqüências. Veja que no caso dos salários, existe um número determinado de anos para o jovem receber, uma vez que sabemos que um ser humano não vive eternamente. Nesse caso trata-se de uma seqüência que possui um certo número de termos que evidentemente não poderá ser nulo, pois ele receberá, no mínimo, um salário; e que também não poderá ser negativo pelo mesmo motivo. Matematicamente, dizemos que os termos dessa seqüência pertence aos N* (conjunto dos números naturais não nulos).

Agora estamos prontos para dar uma definição mais elegante, ou mais formal de uma seqüência que possui essas particularidades:

Uma seqüência de números reais é chamada de Progressão Aritmética (PA) quando todos os seus termos, a partir do segundo, é igual ao seu anterior somado com um número fixo chamado de razão (r) da progressão.

No caso específico dessa seqüência que citamos, temos:

(R$ 400, R$ 500,00, R$ 600,00, R$ 700,00...), onde:

1. Salário inicial: R$ 400,00
2. 1º salário com aumento: R$ 400,00 + R$ 100,00 = R$ 500,00
3. 2º sálario com aumento: R$ 500,00 + R$ 100,00 = R$ 600,00
4. 3º sálario com aumento: R$ 600,00 + R$ 100,00 = R$ 700,00

...e assim sucessivamente...

Se chamarmos o salário inicial de a_1, o 2º salário com aumento de a_2, o 3º salário com aumento de a_3, e assim por diante, podemos expressar, a seqüência dessa forma:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4,...)$$

Já que definimos o aumento fixo de R$ 100,00 como r (razão), então podemos escrever:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

Assim podemos encontrar qualquer termo desta PA, basta colocarmos todos os termos em função de a_1 e da razão *r*. Nesse caso, poderíamos calcular sexagésimo termo (a_{60}), por exemplo, dessa progressão. Assim:

$$a_{60} = a_{59} + r$$

Mas qual é o valor de a_{59}?

Ora, muito simples:

$$a_{59} = a_{58} + r$$

Mas qual é o valor de a_{58}? Nos deparamos com um problema! Teríamos que fazer muitas contas para solucionar esse problema. Perceba que precisamos encontrar um termo da PA, o qual conhecemos seu valor, para realizar o cálculo. Bem, na matemática podemos encontrar uma solução que reduza os cálculos a serem realizados. Veja que temos dois valores da seqüência, os quais conseguimos calcular com maior facilidade, o primeiro termo (a_1) e a razão *r*. Que tal colocarmos todos os termos em função desses dois valores? Veja:

$a_2 = a_1 + r$ (I)

$a_3 = a_2 + r$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$a_3 = a_1 + r + r$ ou $a_3 = a_1 + 2r$

Analogamente:

$a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_6 = a_1 + 5r$

....

Então, $a_{60} = a_1 + 58r$

Desse modo poderíamos descobrir qualquer termo da seqüência, ou seja, um enésimo termo a_n. Assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Eis aí a Fórmula do Termo Geral de uma PA! Descobrimos esta fórmula, tão útil para reduzir os cálculos, sem precisarmos recorrer a argumentações matemáticas muito sofisticadas, apenas usamos o nosso raciocínio lógico! Claro, pelo que já mencionamos acima, n pertence aos N*.

Agora que já temos a fórmula, podemos voltar ao nosso problema do jovem e seu primeiro emprego para realizarmos alguns cálculos, a fim de constatarmos fatos que poderemos comparar com a mesada que, supostamente, recebem ou receberam alguns dos parlamentares do nosso governo. Vamos utilizar para as nossas comparações, a menor cifra que aqui foi citada, a de R$ 30 000,00 (valor de um dos “mensalões”).

ATIVIDADE

Supondo que esse jovem permaneça neste emprego até sua aposentadoria (aos 60 anos de idade). Descubra:

a) Como será feita a progressão desse salário:

b) Qual será a razão desta progressão:

c) Quanto ele ganhará aos seus trinta anos de idade? E aos 48 anos ? Na sua opinião é um bom salário?

d) Quanto ele ganhará no último ano antes de sua aposentadoria? O valor encontrado ultrapassa ou não as supostas mesadas pagas aos parlamentares? Em quanto diferem?

Para que tenhamos uma noção ainda mais ampla entre a dificuldade de um trabalhador comum em adquirir dinheiro e a facilidade de um receptor de "mensalões", vamos somar todos os salários desse jovem, desde seu primeiro mês neste emprego até sua aposentadoria, mostrando a quantia que ele ganhará durante todos esses anos de trabalho. Será que depois de tantos anos de trabalho essa quantia ultrapassará ou não a mesada de 30 mil reais dos parlamentares?

Para efetuar esses cálculos, teríamos que fazer:

R$ 400,00 . 12 + R$ 500,00 . 12 + R$ 600,00 . 12 + R$ 700,00 . 12 +...+ último aumento de salário multiplicado por 12.

Ou seja: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Novamente nos deparamos com outro problema, pois precisaríamos somar o salário desde que o jovem ingressou no emprego (18 anos) até sua aposentadoria (60 anos), ou seja, seria uma adição de 42 parcelas, além de ter que calcularmos todas elas antes, pois lembremos que o aumento é anual e o ano é composto de 12 meses, assim, por exemplo, o primeiro termo desta progressão seria 400.12 = 4800, o segundo seria 500.12= 6000, e assim por diante! Que trabalhão não é mesmo?

E mais uma vez vamos recorrer ao nosso raciocínio lógico para descobrir uma forma mais simples e reduzida de realizarmos esses cálculos. Para isso vamos chamar essa soma gigantesca de S_n.

Sabemos que: $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{(n-2)} ... + a_{(n-1)} + a_n$ (I) (ordem crescente dos termos da P.A).

Ou: $S_n = a_n + a_{(n-1)} + a_{(n-2)} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (II)(ordem decrescente dos termos da P.A).

Somando todos os termos de (I), com todos os termos de (II) teremos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{(n-1)}) + (a_3 + a_{(n-2)}) + ... + (a_{(n-2)} + a_3) + (a_{(n-1)} + a_2) + (a_n + a_1)$

Como as *n* parcelas têm o mesmo valor; pois são termos eqüidistantes dos extremos, podemos escrever que $2S_n = (a_1 + a_n).n$. Logo:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

onde:

a_1: primeiro termo

a_n: enésimo termo (ou último termo)

n: número de termos

S_n: soma dos *n* termos

ATIVIDADE

Agora você pode somar todos os salários do jovem trabalhador, desde seu primeiro mês no emprego até sua aposentadoria. Considere que:

a_1 = primeiro salário vezes 12 meses

a_n = último salário vezes 12 meses

n = número de aumentos anuais (desde os 18 até os 60 anos)

S_n = soma de todos o montantes anuais de salários

a) Caso esse valor seja superior à mesada, verifique em quantos meses um parlamentar, receptor dessas mesadas, ganharia esse dinheiro? Qual a sua opinião pessoal quanto a isso?

b) Verifique quantos anos esse jovem deveria trabalhar para que seu salário chegasse ao mesmo valor das mesadas de 30 mil reais? Isso seria possível?

c) Agora verifique de quanto teria que ser o aumento anual desse jovem para que ele chegasse a receber 30 mil reais aos seus 48 anos de idade, de forma que pudesse desfrutar ainda por um bom tempo antes de sua velhice, os benefícios desse grandioso salário. É comum nos dias de hoje um trabalhador receber um aumento no valor que você encontrou? Justifique.

d) Finalmente verifique qual deveria ser o salário inicial do jovem para que ele pudesse obter o salário de 30 mil reais em um período de 15 anos. Tratando-se da crise do desemprego, é comum um jovem, ao ingressar em seu primeiro emprego, receber um salário inicial com o valor que você encontrou?

São muitas as revoltas ao verificar essas situações, não bastasse a crise do desemprego, as dificuldades que um jovem enfrenta para ingressar no mundo do trabalho, ainda nos deparamos com a larga gama de corrupção existente em nosso país e no mundo. A corrupção é uma palavra muito falada e muito ouvida hoje em dia, porém é importante saber o que, de fato, se caracteriza corrupção. Sabemos que vivemos em uma república, onde os recursos públicos (adquiridos através de impostos), são destinados a atender as necessidades da sociedade (saúde, educação, segurança, etc.). Porém, quando parte desses recursos são desviados para uma esfera privada, gerando privilégios individuais, então um ato de corrupção esta consumado. Por isso existe muito dinheiro público mal aplicado, tantos hospitais, tantos orfanatos, escolas sem recursos, sem falar nas estradas em condições precárias, as tarifas cada vez maiores que o trabalhador é obrigado a pagar, muitas vezes diminuindo de seu próprio sustento, a fome, a miséria e todas as mazelas que assolam nossa sociedade.

Os primeiros registros de práticas de ilegalidade no Brasil, que temos registro, datam do século XVI no período da colonização portuguesa. O caso mais freqüente era de funcionários públicos, encarregados de fiscalizar o contrabando e outras transgressões contra a coroa portuguesa e ao invés de cumprirem suas funções, acabavam praticando o comércio ilegal de produtos brasileiros como pau-brasil, especiarias, tabaco, ouro e diamante. (BIASON, 2007)

DEBATE

O que mais te incomoda em relação a situação econômica de nosso país? A opinião dos colegas de classe é comum ou existem divergências? Será fácil administrar um pais em face a tantos desafios?

ATIVIDADE

Após realizar o debate, estabeleça uma Progressão Aritmética onde poderiam estar sendo melhor aplicados os recursos públicos. Para isso utilize-se de uma quantia de 4 milhões de reais, que é justamente o valor que teria sido repassado, segundo denúncias, pelo PT ao deputado Roberto Jefferson para ajuda na campanha do PTB em 2004, sendo que o deputado recusou-se a dizer para os investigadores da CPI do "mensalão", o que realmente fez com essa quantia...(Jornal gazeta do Povo, 20 de junho de 2005, p. 11).

Lembre-se de que você precisará estabelecer o seguinte:

- Uma aplicabilidade social para o montante de 4 milhões de reais
- Uma quota inicial para essa aplicação, que será o 1º termo (a_1) da P.A.
- A quantia que será aumentada progressivamente dessa quota, ou seja, a razão (r) da P.A.
- Durante quanto tempo será realizada essa aplicação, que é o número de termos (n) da P.A.
- Qual será o valor da última aplicação, que será o termo geral (a_n) da P.A.
- Utilizar-se da soma dos termos (S_n) de uma P.A. para chegar na quantia de 4 milhões de reais.

Ao término dessas atividades, poderá ser realizada a exposição das mesmas, que poderão ser em equipes, promovendo novo debate das formas de como o dinheiro público poderá ser aplicado de maneira que beneficie a sociedade.

Para pensar:

Em uma perspectiva histórica, observa-se mudanças na sociedade. No século XIX, por exemplo, tínhamos uma monarquia onde o parlamento era controlado pelo rei, porém hoje, vivemos em uma república, onde há independência dos poderes mas, controlada pelo capital financeiro. Isso nos faz concluir que a História nunca se repete. Isso é um fato, pois existem os processos de transformações. Porém, dentre os muitos momentos históricos, podemos estabelecer interessante paralelo, que nos faz refletir sobre crises anteriores e atuais. Uma expressão disso encontramos em uma matéria de jornal, dizendo que "o publicitário Marcos Valério, acusado pelo deputado Roberto Jefferson de ser um dos articuladores do pagamento do mensalão, foi comparado pelo próprio deputado como uma versão macaqueada de PC Farias". (Gazeta do Povo, 1o de junho de 2005, p.13).

PC Farias - Paulo César Farias – foi tesoureiro da campanha de Collor na eleições de 1989. Participou de diversos esquemas de de corrupção entre 1990 e 1991. PC e sua namorada foram encontrados mortos em sua casa de praia em 1996. Até hoje não existem provas se houve crime passional e se foi queima de arquivos.

Segundo o que foi publicado, Miro Teixeira, ex-ministro das comunicações, na tentativa de desqualificar o depoimento de Roberto Jefferson disse:

> Se tudo o que Roberto Jefferson fala for verdade, Collor (Fernando Collor de Melo, ex-presidente) era um inocente... Temos que rever o impeachment do Collor porque ele era honesto". Miro em depoimento de três horas disse que propôs a Jefferson que fizesse a denúncia do "mensalão" na tribuna da Câmara. "Se eu for para a tribuna agora, transformo o presidente em um Lech Walessa (líder sindicalista polonês que fundou o Movimento Sindical Solidariedade, chegou à presidência da Polônia e acabou o mandato desgastado por denúncias de corrupção)", teria dito Jefferson.(Gazeta do Povo, 2 de junho de 2005, p. 15).

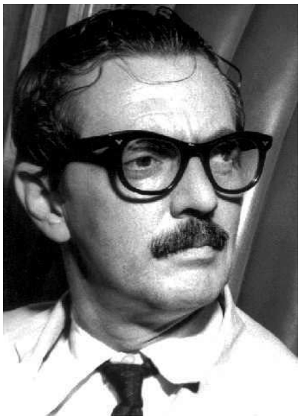
Outro fato que também deixou muito estreita a relação dos atuais acontecimentos políticos com os acontecimentos que marcaram a história de nosso país, partiu do próprio presidente Luiz Inácio Lula da Silva quando mencionou que:

> "Não renunciará ao mandato, nem seguirá ao caminho de Getúlio Vargas, que, em 1954, suicidou-se diante da pressão à sua gestão" Em depoimento do próprio presidente encontramos o desabafo: "Nem farei o que fez o Getúlio Vargas, nem farei o que fez o Jânio Quadros, nem farei o que fez João Goulart. O meu comportamento será o comportamento que teve Juscelino Kubitschk: paciência, paciência e paciência", mais adiante, "a verdade prevalecerá, e o povo brasileiro vai saber verdadeiramente o que está acontecendo no Brasil, o que está por trás do que está acontecendo no Brasil, quem são os ocultos ou não, porque os públicos nós já sabemos e vai saber, concretamente, quem praticou ou não corrupção neste país" (Gazeta do Povo, 26 de agosto de 2005, p. 15).

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Get%C3%BAlio_Vargas

O presidente Lula se refere à ex-presidentes, justamente porque estes tiveram seus nomes gravados na História, marcando suas passagens no poder com crises políticas. O comportamento e atitudes de cada um deles, reflete bem o que Lula quis dizer. Getúlio vargas, não aceitou a vitória de seus inimigos políticos e conforme os registro Históricos:

> "Na madrugada do dia 25 de agosto de 1954, após tensa reunião com seus ministros, na qual ficou claro que só havia dois caminhos – a renúncia ou a deposição -, Getúlio retirou-se para seus aposentos no Palácio do Catete e, após escrever uma carta-testamento dirigida a todos os brasileiros, deu um tiro no coração." (CARVALHO, p. 293).



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%A2nio_Quadros

Jânio Quadros, embora conservador, assumiu o governo, representando a promessa de revolução pela qual o povo ansiava, em um clima de otimismo. De fato, o programa de seu governo era revolucionário."Mas o novo presidente pouco pôde contra os problemas acumulados, renunciando depois de governar por sete meses" (CARVALHO, p. 298)

■ Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Jo%C3%A3o_Goulart

João Goulart foi presidente do Brasil em em 1961. Foi derrubado do poder através do golpe de 64.

> "O golpe que derrubou o presidente João Goulart, foi desencadeado por militares, mas contou com a intensa participação civil. [...] O presidente não conseguiu organizar uma reação. Entre outros motivos porque os militares interferiram no sistema de comunicação, dificultando o comando unificado das forças governamentais" (FIGUEIREDO, p. 301).

Lula se remete à Juscelino porque este também teve que enfrentar muitas situações de pressão. No seu governo, JK contratou empréstimos de fontes públicas externas para que pudesse cumprir com um programa que pretendia fazer "cinqüenta anos em cinco" - seu lema, tendo como uma de sua metas, recuperar aos brasileiros a confiança em si mesmos. Porém também enfrentou forte crise no país, pois apesar do crescimento econômico, houve desequilíbrio financeiro e aumento de inflação. Mas Juscelino manteve a paciência para enfrentar as acusações de corrupção, as tentativas de golpe de Estado e de cassação. Dessa forma Lula faz um comparativo com a postura de Juscelino, frente as crises políticas, e a sua, frente a "crise do mensalão".

■ Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Juscelino_Kubitschek

Fatos que marcaram a história da política no Brasil, hoje estão sendo foco de comparações com a atual crise política. Ao pararmos para refletir sobre a nossa história, a de nosso país, começamos a desenvolver um pensamento mais crítico, e emitimos assim conclusões próprias.

PESQUISA

Neste texto, foram apresentadas comparações entre Luis Inácio Lula da Silva os ex-presidentes Juscelino Kubitschk e Lech Walessa em diferentes momentos da História, tanto no Brasil, como na Polônia. Neste contexto, pesquise em livros de História Mundial ou em sites da Internet, a crise política na Polônia sob a presidência de Lech Walessa, estabelecendo comparativo com a crise que enfrentada por Luiz Inácio Lula da Silva, em 2005.

É importante refletir sobre a História, e não apenas conhecê-la, nesse caso, estaríamos apenas acumulando um conhecimento sem poder articulá-lo, sem crescermos com ele. O ideal é que possamos refletir e questionar diante da história, para desenvolvermos novas idéias e uma nova visão de sociedade, uma visão que seja ampla e crítica, na busca de soluções para os nossos problemas atuais e futuros. É nesse sentido que buscamos na Matemática ferramentas para nossa compreensão, entendermos a sociedade numa construção histórica apenas não basta, é preciso articula-lá com a realidade, estabelecendo comparações e realizando projeções, para que assim possamos atuar de modo significativo nas transformações que buscam a melhoria da qualidade de vida, dentro de uma sociedade mais justa e igualitária.

Assim, é possível entender porque um país como o Brasil reflete tantas diferenças sociais, como as crises políticas nos afetam e, principalmente, como questionar e argumentar contra as injustiças, a corrupção, a má aplicação do dinheiro público e, através de conhecimentos adquiridos através da Matemática, aliado ao contexto histórico e social, podermos cobrar justiça para nossa sociedade e tomarmos decisões importantes para o nosso futuro, com consciência social e política.

Referências Bibliográficas

GAZETA DO POVO. **Não farei como Getúlio e Jânio, farei como JK**. Curitiba, 26 de agosto de 2005. Caderno Brasil, p.15.

GAZETA DO POVO. **Jefferson recusa-se a dizer se dividiu r$ 4 milhões com integrantes do PTB**. Curitiba, 23 de junho de 2005. Caderno Brasil, p. 17.

GAZETA DO POVO. **Miro confirma denúncias do mensalão**. Curitiba, 2 de junho de 2005. Caderno Brasil, p. 15.

GAZETA DO POVO.**Jefferson não vai dizer o que fez com os R$ 4 milhões**. Curitiba, 20 de junho de 2005. Caderno Brasil, p.11.

GAZETA DO POVO. **Novas denúncias agravam a crise do "mensalão"**. Curitiba, 13 de junho de 2005. Caderno Brasil, p. 11.

GAZETA DO POVO. **Mensalão continuou a ser pago**. Curitiba, 1o de junho de 2005. Caderno Brasil, p. 13.

Obras Consultadas

BARRETO F. B./BARRETO C. B. **Matemática por aula: volume único**: ensino médio. São Paulo: FTD, 2000.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 1989.

GIDDENS, A. **Sociologia**. TRADUÇÃO: Sandra R. Netz. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

GIOVANNI, J. R./BONJORNO, J. G. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

POLYA, G. **A arte resolver problemas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J, P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SANTOS, C. A. M./GENTIL, N./Gentil, N./GRECO, S. E. **Matemática: edição compacta: série novo ensino médio**: volume único. São Paulo: Ática, 2003.

Documentos Consultados *ONLINE*

BIASON, R. **Breve História da Corrupção no Brasil**. Diponível em: <http://www.votoconsciente.org.br/index.php?option=com_content&task=view&id=214&Itemid=44>. Acesso em: 04 dez. 2007.

Radicalgraphics. **Money**. Disponível em: <http://www.radicalgraphics.org/. Acesso em 1de nov. 2005.

Wikipedia The free Encyclopedia: Getúlio Vargas. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Get%C3%BAlio_Vargas>. Acesso em: 09 de dez. 2007.

Jânio Quadros. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%A2nio_Quadros>. Acesso em: 09 de dez. 2007.

João Goulart. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Jo%C3%A3o_Goulart>. Acesso em: 09 de dez. 2007.

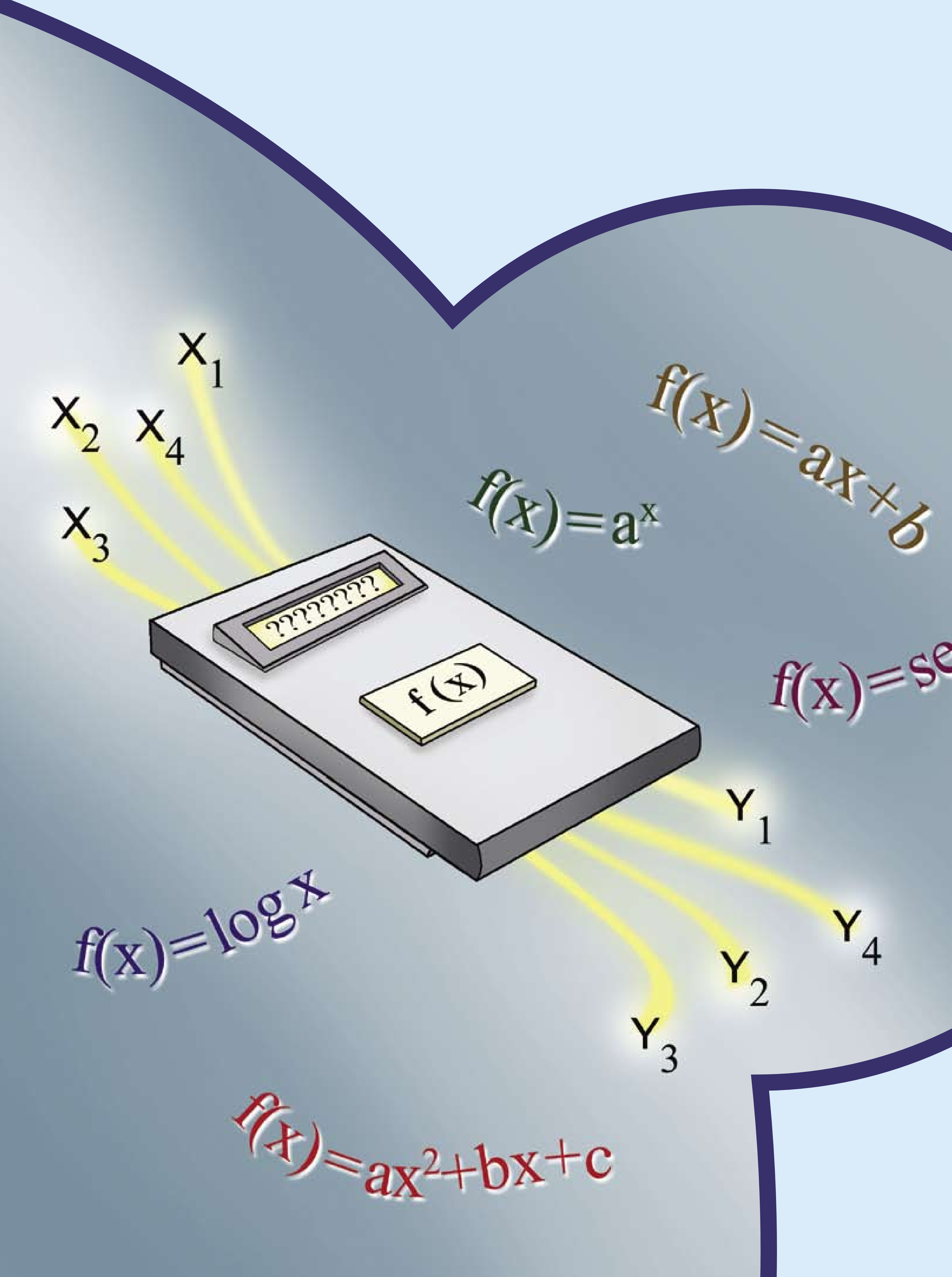
Juscelino Kubitschec. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Juscelino_Kubitschek>. Acesso em: 09 de dez. 2007.

ANOTAÇÕES

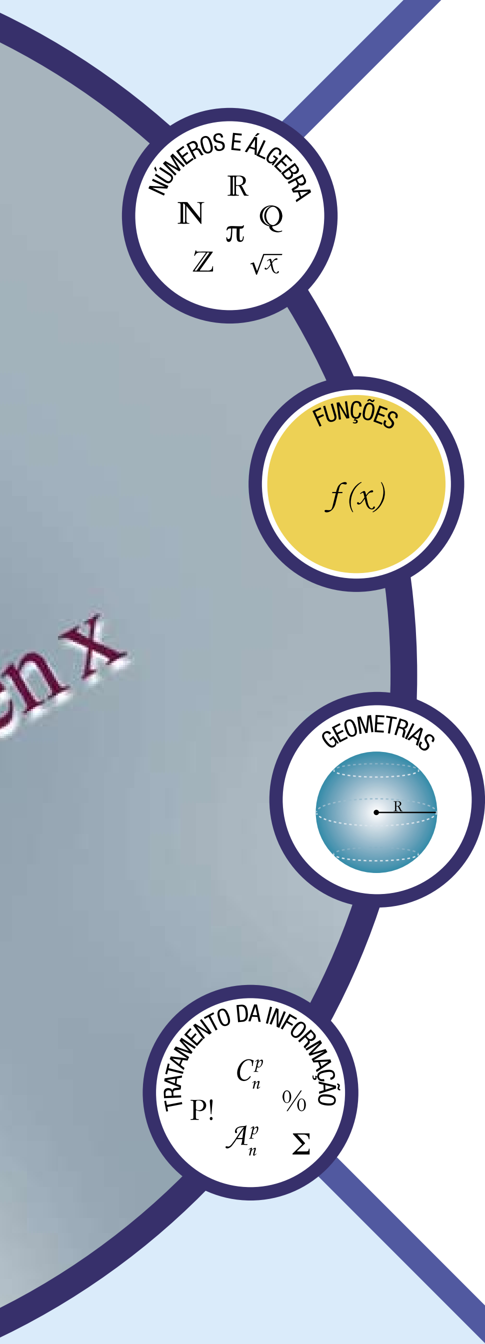
ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES



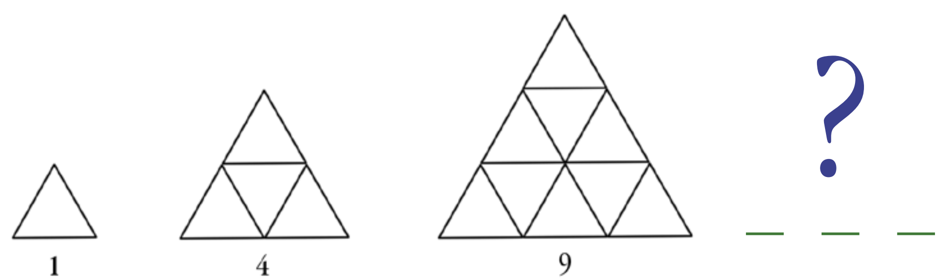
x_1
x_2 x_4
x_3
??????????
f(x)
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
$f(x)=se$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$



7

QUAL É O PRÓXIMO NÚMERO?

Donizete Gonçalves da Cruz[1]



Desenhe o próximo triângulo. Quantos triângulos menores, congruentes ao primeiro, a quarta figura terá?
Quantos segmentos serão necessários para construir os triângulos internos da próxima figura?
Após responder a segunda pergunta, você terá uma seqüência numérica. Então subtraia, de cada termo posterior, o anterior. O que acontece? Do resultado que conseguiu, subtraia, de cada termo posterior, o anterior. O que acontece?

[1]Colégio Estadual Santa Cândida - EFM - Curitiba - PR

A História da Matemática é um meio favorável para abordarmos conceitos matemáticos. Foi decifrando os escritos antigos, como o Papiro de Ahmes e outros, que cientistas puderam compreender sistemas de numeração, técnicas de calcular, linguagens matemáticas e, de forma geral, como a matemática foi se desenvolvendo a partir do pensamento de povos que viveram há muitos anos. As questões acima já foram motivo de investigação de pessoas que viveram há muito tempo antes de nós e contribuíram para a construção e sistematização do conhecimento matemático

Há milhares de anos antes de nós, os homens já construíam figuras e desenhos que revelavam preocupações com relações espaciais. Suas construções, como potes, tecidos e cestas, mostram exemplos de congruência e simetrias, conforme vimos na figura de nosso problema.

Os números 1, 4, 9, abaixo das figuras, expressam o número de triângulos congruentes, ao primeiro, que cada figura possui. Se considerarmos o número de segmentos que formam os lados de cada triângulo congruente, teremos outra seqüência numérica.

Observe que a subtração do número de triângulos da figura de maior número de triângulos para a próxima, à esquerda, gera uma seqüência numérica.

Hoje as seqüências numéricas são vistas em vários meios onde há atuação das pessoas. Para nosso estudo, vamos nos ater a duas abordagens. Vale considerar que o Folhas *A Rede e o Ser* pode ser visto como uma implementação desse trabalho.

Até o momento, quais foram os anos de realização das copas do mundo de futebol? Observe a resposta: (1930, 1934, 1938, ----, ----, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002,...). Nos anos de 1942 e 1946 não houve realização de copas, pois se vivia momentos de conflitos por conta da Segunda Guerra Mundial.

Quais os anos de realização das olimpíadas? Se tomarmos por base a partir do ano de 1896, quando foram realizados os jogos olímpicos de Atenas, temos: (1896, 1900, 1904, 1908, 1912, ..., 1920, 1924, 1928, 1932, 1936, ..., 1948, 1952, 1956, 1960, 1964, 1968, 1972, 1976, 1980, 1984, 1988, 1992, 1996, 2000, 2004, ...). Semelhante às copas do mundo, não ocorreu a realização dos jogos de 1916 e 1942 por conta da Primeira e da Segunda Guerra Mundial, respectivamente.

Lembra-se de quantas vezes você já tomou remédio? Os médicos exigem que o mesmo medicamento seja tomado em intervalos de tempos iguais, ou seja, segundo uma seqüência numérica.

Há muitas situações em que as seqüências numéricas contribuem para organizar, sistematizar e resolver problemas. Prosseguindo nosso estudo, vamos abordar a seqüência das copas do mundo, que foram e são realizadas segundo um intervalo de tempo que representa uma seqüência matemática.

ATIVIDADE

Observe os anos de realização das copas e responda: qual é o intervalo de tempo, em anos, entre as copas? Que operação você utiliza para atingir este resultado?

No estudo formal da Matemática, o número que você escreveu na resposta anterior tem uma denominação assumida historicamente. Investigue qual é essa denominação.

Diante da resposta da questão anterior, é possível descobrir quais os anos futuros em que serão realizadas as próximas copas?

ATIVIDADE

a) Quais os anos de realização das próximas duas copas?

b) Em que ano será realizada a vigésima quinta (25ª) copa do mundo?

Há meios diferentes para responder a questão *b*. É provável que, para encontrar a resposta, muitos de vocês escreveram a seqüência até o 25º termo.

E quando, para a solução de um problema, requisitar a procura de termos cuja posição se encontra distante dos primeiros termos da seqüência?

Para responder esses problemas, podemos abordá-los por meio de conceitos matemáticos. É comum cada termo de uma seqüência receber uma denominação. Neste caso, os termos da seqüência (1930, 1934, 1938, ----, ----, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, ...), a iniciar pelo primeiro número, chamaremos, a partir daqui, de a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Assim, $a_1 = 1930$; $a_2 = 1934$; $a_3 = 1938$; $a_4 = 1942$; $a_5 = 1946$; $a_6 = 1950$. O a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n são denominados de termos da seqüência.

Conhecendo que $a_1 = 1930$; $a_2 = 1934$ e sucessivamente, podemos fazer alguns cálculos matemáticos.

ATIVIDADE

a) $a_2 - a_1 =$ $a_3 - a_2 =$ $a_4 - a_3 =$
O que você deduz desses cálculos?

b) $a_{15} - a_{14} = a_{14} - a_{13}$ $a_{10} - a_9 = a_8 - a_7$
O que você deduz desses cálculos?

c) Então, como calcular o 25º termo da seqüência em estudo de forma a não escrevê-la por inteiro?

Para responder tal problema, buscaremos o entendimento de conceitos matemáticos que contribuem para construir uma resposta.

$a_1 = 1930$

$a_2 = 1930 + 4 = 1934$, ou seja, é o mesmo que $a_2 = a_1 + 1 . 4$ (um vezes quatro) Que relação existe entre a_2, a_1 e o coeficiente que multiplica o termo 4?

$a_3 = 1930 + 4 + 4 = 1938$. É o mesmo que $a_3 = a_1 + 2 . 4$ (dois vezes quatro). Que relação existe entre o termo a_3, a_1 e o coeficiente que multiplica o número 4?

Também $a_3 = 1934 + 4$, sendo o mesmo que $a_3 = a_2 + 1 . 4$. Que relação existe entre a_3, a_2 e o coeficiente 1 que multiplica o 4?

$a_4 = 1930 + 4 + 4 + 4 = 1942$

$a_4 = a_1 + 3 . 4$

$a_4 = a_2 + 2 . 4$

$a_4 = a_3 + 1 . 4$

Observe atentamente o termo a_4, o próximo termo após o sinal de igual e o coeficiente que multiplica o número 4. Que conclusões você chega?

Observe $a_5 = 1930 + 4 + 4 + 4 + 4 = 1946$. Anote as possibilidades de escrever o termo a_5 em função dos termos anteriores conhecidos.

$a_6 = a_1 + 5 . 4$

$a_6 = a_2 + 4 . 4$

$a_6 = a_3 + 3 . 4$

$a_6 = a_4 + 2 . 4$

$a_6 = a_5 + 1 . 4$

Percebe-se que há algumas maneiras de escrever e encontrar o termo a_6. Formule e escreva sua idéia sobre os meios pelos quais podemos calcular o termo a_6.

Abordamos as possibilidades de encontrarmos um termo de uma seqüência desde que conheça os termos anteriores. Portanto, voltando ao item c, Então, como calcular o 25º termo da seqüência em estudo, de forma a não escrevê-la por inteiro? Já temos possibilidades de elaborar uma resposta. Escreva 5 maneiras de encontrarmos o 25º termo da seqüência e descobrirmos em que ano será realizada a vigésima quinta copa do mundo.

DEBATE

a) Na seqüência que estamos estudando, podemos encontrar um termo qualquer desde que conheçamos os termos anteriores. Para encontrar o termo x, no mínimo, quantos termos anteriores devemos conhecer?

b) Investiguem e descubram uma regra geral para calcular termos de uma seqüência matemática semelhante a que estamos estudando.

Registre por escrito suas idéias.

Percebemos que a seqüência até aqui estudada possui uma regularidade, ou seja, há uma constante na sua construção, cujos termos são escritos em intervalos iguais. São os períodos que separam uma copa do mundo da outra. Entretanto, nem todas as seqüências matemáticas são escritas segundo a regularidade observada, quem traz esse fato ao nosso conhecimento é Leonardo de Pisa.

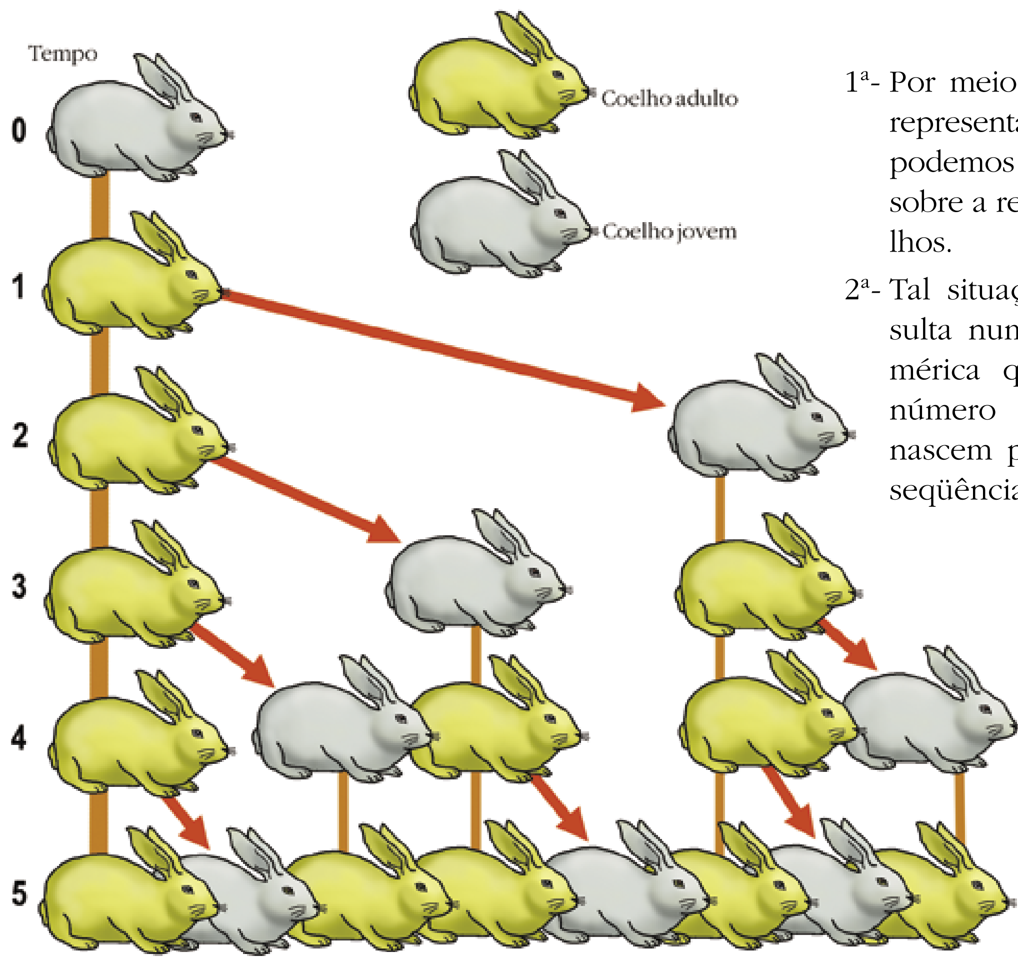
Em 1202 Leonardo de Pisa chamado Fibonacci, um mercador italiano, viajou pelo oriente e obteve informações sobre assuntos relacionados com Aritmética e Álgebra. No regresso escreveu a obra chamada *Liber Abaci*, cujo significado é *Livro dos Ábacos*, ilustrada com muitos problemas que representaram, para aquele momento, novidades no conhecimento matemático. Foi por meio deste livro que os europeus conheceram os algarismos hindus, também denominados arábicos, fato que, posteriormente, contribuiu para o desenvolvimento matemático na Europa.

O enunciado de um dos problemas que caracteriza a série de Fibonacci é: "quantos casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se a) cada casal originar um novo casal em cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês; e b) não ocorrerem mortes?" (STRUIK, 1997, p. 139). Esse problema, possivelmente, foi inventado pelo próprio Fibonacci. Entendemos ser um problema bastante superficial, pois parte de uma situação, que dificilmente acontece. Todavia, vale considerá-lo para nosso estudo, uma vez que o mesmo abriu caminhos para avanços no conhecimento matemático.

Considera-se, também, que na natureza, em algumas espécies de seres vivos e em fenômenos físicos, a regularidade dessa seqüência ocorre com precisão.

Procurando entender

Vamos resolver o problema elaborado por Fibonacci em 1202? É interessante resolvê-lo de duas maneiras: uma é representada na figura 1 e a outra é por meio do desenvolvimento da seqüência.



1ª- Por meio de um desenho, representado na figura 1, podemos formular idéias sobre a reprodução de coelhos.

2ª- Tal situação problema resulta numa seqüência numérica que representa o número de coelhos que nascem por meio de uma seqüência numérica.

Figura 1: Esquema representativo da reprodução de coelhos segundo o problema de Fibonacci

Vamos partir do princípio que o tempo 0 (zero) é o momento que o primeiro casal se une, ou seja, 30 dias antes de nascer o primeiro casal, momento que consideraremos o início do segundo mês.

Partindo deste cálculo, no início do 2º mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos recém-nascidos, ou seja, 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém-nascidos. Se desenharmos uma seqüência matemática, teremos:

Mês	0	1º	2º	3º	4º	5º
Pares de coelhos	1	1	2	...	...	...

No início do 3º mês, o casal adulto terá produzido mais um casal enquanto o par jovem terá completado um mês de vida não tendo reproduzido. Dessa forma, no início do terceiro mês existirão três pares de coelhos. Assim: 3 pares = 1 adulto + 1 com um mês de idade + 1 recém nascido. A seqüência ganha mais um elemento, ficando da seguinte forma:

Mês	0	1º	2º	3º	4º	5º
Pares de coelhos	1	1	2	3	...	...

No início de 4º mês, existirão dois pares adultos que já produziu um novo casal e outro casal já completou um mês. Então temos 5 pares: 2 adultos + 1 com um mês + 2 recém-nascido. Temos a seguinte seqüência:

Mês	0	1º	2º	3º	4º	5º
Pares de coelhos	1	1	2	3	5	...

Investigando

Observando a descrição das possibilidades de formação de pares de coelhos no 2º , 3º e 4º meses, descreva as situações possíveis para o 5º e 6º meses.

ATIVIDADE

Agora é com você

a) Encontre a resposta do problema que Fibonacci elaborou em 1202, completando a seqüência: (1, 1, 2, 3, 5, ...)

b) Diante da resposta do item a, é possível perceber uma regularidade matemática que ocorre a partir do terceiro termo da seqüência tendo em vista, sempre, os dois termos anteriores. Que regularidade é essa?

Será que esta seqüência de Fibonacci pode ser interpretada em outras situações que sejam naturais? A resposta é sim, sendo que na natureza é possível perceber a seqüência de Fibonacci na formação de alguns vegetais, como nos arranjos dos troncos de árvores e na formação de frutos.

Em animais também é possível estabelecer a relação da natureza com a seqüência matemática em estudo, percebendo, por exemplo, a regularidade na formação espiral da concha do *Nautilus marinho*. Observe as figuras 2, 3 e 4 e note que as curvas desse molusco se desenvolvem numa concordância em espiral, que podemos transpor para uma situação matemática, formando uma seqüência de Fibonacci.

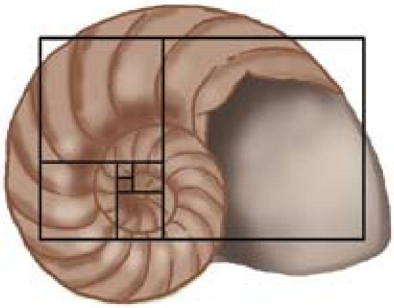


Fig. 2

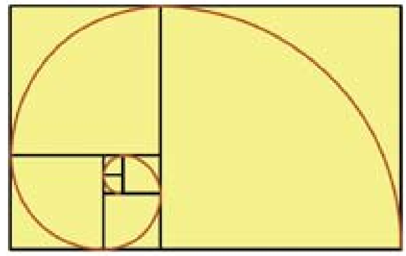


Fig. 3

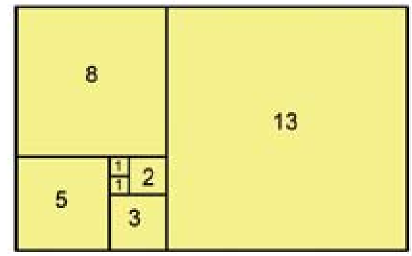


Fig. 4

DEBATE

Observe a seqüência das figuras 2, 3 e 4. Com colegas e professor, investigue e escreva sobre a regularidade matemática que ocorre entre as curvas da casa do Nautilus marinho e as figuras quadrangulares, até a seqüência formada na figura 4.

Na Botânica, campo da Biologia que podemos conceituar como estudo científico de plantas, fungos e algas que envolvem outras disciplinas científicas, cujo objeto de estudo pauta-se em investigar sobre crescimento, reprodução, metabolismo, doenças e evolução dos vegetais, encontramos desenvolvimento de galhos, folhas, flores, etc. que ocorre segundo a seqüência de Fibonacci.

O crescimento dos galhos da planta *Achíllea ptarmica* se dá segundo certas características.

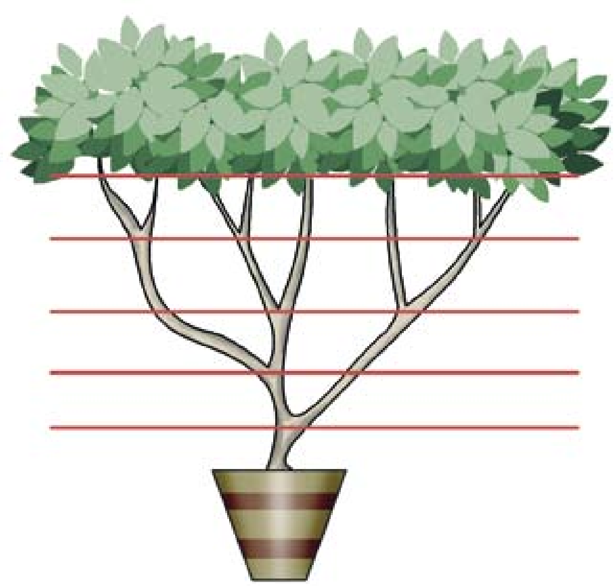


Figura 5: Vegetal *Achíllea ptarmica*

ATIVIDADE

Observe a figura 5, constate e escreva, em forma de uma seqüência numérica, o número de galhos que são criados. Tome como referência os galhos que se originam em cima dos segmentos de retas. Inicie sua observação partindo do primeiro segmento logo acima do vaso.

ATIVIDADE

Procure figuras de vegetais em revistas, livros e internet, ou, caso possua uma câmara fotográfica, poderá tirar fotos. Prepare um painel com as figuras e, ou fotos e constate se, em algumas delas, há a presença da seqüência de Fibonacci.

Sugere-se: copa do pinheiro, pé de milho e flor do girassol.

Que semelhança se percebe entre a seqüência formada pelo desenvolvimento dos galhos da *Achíllea ptarmica* e a seqüência formada pela reprodução dos coelhos e o desenvolvimento das curvas da concha do *Nautilus marinho*?

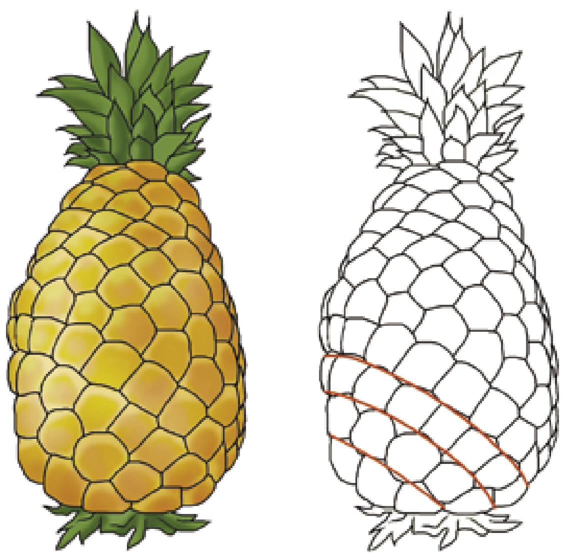


Figura 6 – Vegetal Ananas Comosus

No caso do abacaxi – figura 6 –, fruta originária da América Central e México, rica em vitamina C e sais minerais como cálcio, ferro e fósforo, cujo nome científico é *Ananas comosus* pertencente à família Bromeliaceae, a planta adulta é constituída por raízes fasciculares superficiais e um talo (caule) em forma de clava curta. Possui folhas (bráctea) longas e duras em forma de calhas inseridas no talo, formando uma densa espiral que, partindo da base, formam uma roseta. O abacaxi é um fruto composto, resultado do fenômeno da inflorescência da qual origina-se de 100 a 200 frutos simples (“gomos“).

Cada “gomo” lembra a forma aproximada de um hexágono e participa de três espirais que se cruzam. As espirais formam um ângulo de inclinação com o eixo do abacaxi e, de acordo com esse ângulo formado com o eixo, as disposições dos gomos, visíveis na casca, formam uma seqüência de Fibonacci.

ATIVIDADE

Em grupo, traga para sala de aula alguns abacaxis e procure constatar a presença da seqüência de Fibonacci na disposição dos frutilhos (“gomos”).

Os números de Fibonacci aparecem em situações presenciadas na Óptica, conteúdo estudado na disciplina de Física. Quando um raio de luz incide numa superfície que separa dois meios, pode ocorrer, o fenômeno da reflexão da luz. A figura 7 representa o comportamento de um raio de luz que, ao incidir numa superfície plana segundo um ângulo entre a normal e a superfície, pode ser refletido pela superfície ao meio incidente. O ângulo refletido pela superfície é igual ao ângulo incidente.

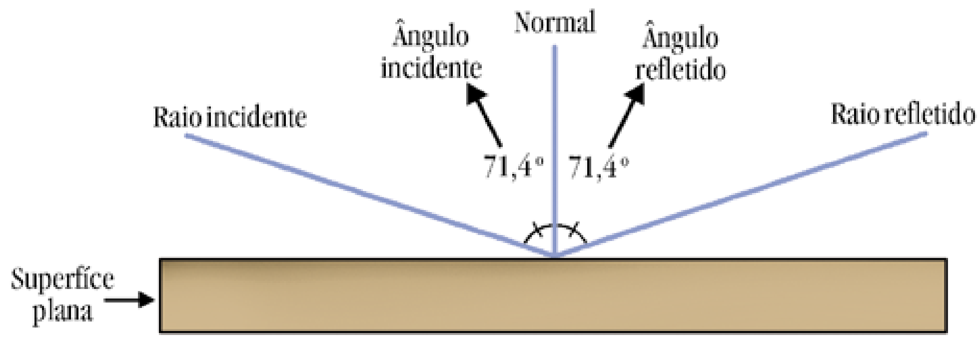


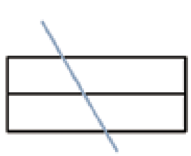
Figura 7 - Representação da reflexão de raio de luz

Uma situação que se obtém resultados interessantes é o número de caminhos possíveis que um raio de luz, ao bater numa superfície em duas placas de vidros postas uma sobre a outra com índices de refração diferentes, produz reflexão.

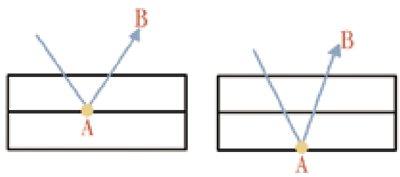
ATIVIDADE

É possível contar o número de caminhos permitidos que um raio de luz percorre diante das possibilidades de ocorrência de reflexões. No exemplo abaixo, o desenho representa duas placas de vidro uma sobre a outra. Um raio de luz incide sobre essas placas e produz reflexões.

Lembre-se de que a reflexão ocorre quando o raio bate numa superfície e retorna segundo um ângulo que se forma. Nas ilustrações abaixo, o número de reflexões é representado pela trajetória que vai de uma letra a outra. O desafio é contar quantos são os números de caminhos possíveis.



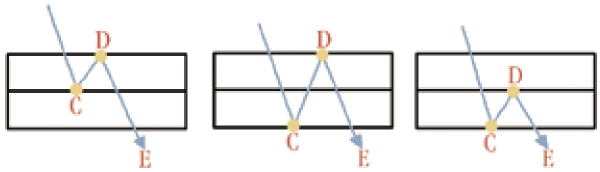
Neste caso, quantas são as reflexões?



Nesta situação:

a) Quantas são as reflexões?

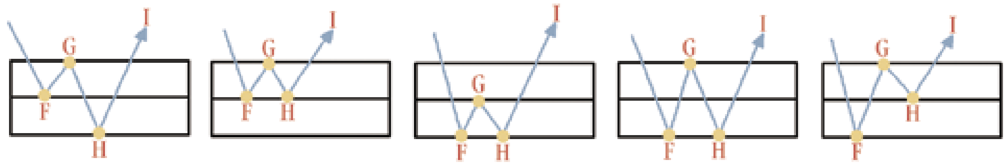
b) Quantos são os caminhos possíveis de produção de reflexão?



Nesse exemplo, quantos são:

a) Os números de reflexões?

b) Os caminhos que ocorrem reflexão?



No desenho acima:

a) Quantos são os caminhos possíveis de produção de reflexão?.

b) Qual é o número de reflexões?

ATIVIDADE

Escreva a seqüência obtida por meio das respostas de cada item b dos exemplos anteriores.

Compare esta seqüência com a que representa a reprodução de coelhos, a formação dos galhos da *Achíllea ptarmica*, a concordância das curvas da concha do *Nautilus* marinho e a disposição dos gomos do abacaxi.

São iguais? ( ) SIM ( ) NÃO. Justifique.

ATIVIDADE

Ao apontarmos para uma conclusão desse nosso estudo, vamos, juntamente com colegas e professor, buscar uma sistematização através de um modelo formal que seja válido.

Partiremos de um exemplo que representa uma seqüência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... Mostre, matematicamente, que a expressão que dá o número de Fibonacci de ordem n, nessa e nas outras seqüências de Fibonacci abordadas nessa produção, é: **F(n) = F (n – 1) + F (n – 2)**.

Referências Bibliográficas

STRUIK, D. J. **História concisa das Matemáticas**. Tradução: GUERREIRO, J. C. S. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

Obras Consultadas

ALENCAR, M. E. G. O número phi e a seqüência de Fibonacci. **Física na escola**, v. 5, nº. 2, 2004.

RAVEN, P. H.; EVERT, R. F.; CURTIS, H. **Biologia vegetal**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1996.

RUPPERT, E. E.; BARNES, R. D. **Zoologia dos Invertebrados**. São Paulo: Roca, 1996.

OLIVEIRA, E. C. **Introdução à biologia vegetal**. São Paulo: Edusp, 1996.

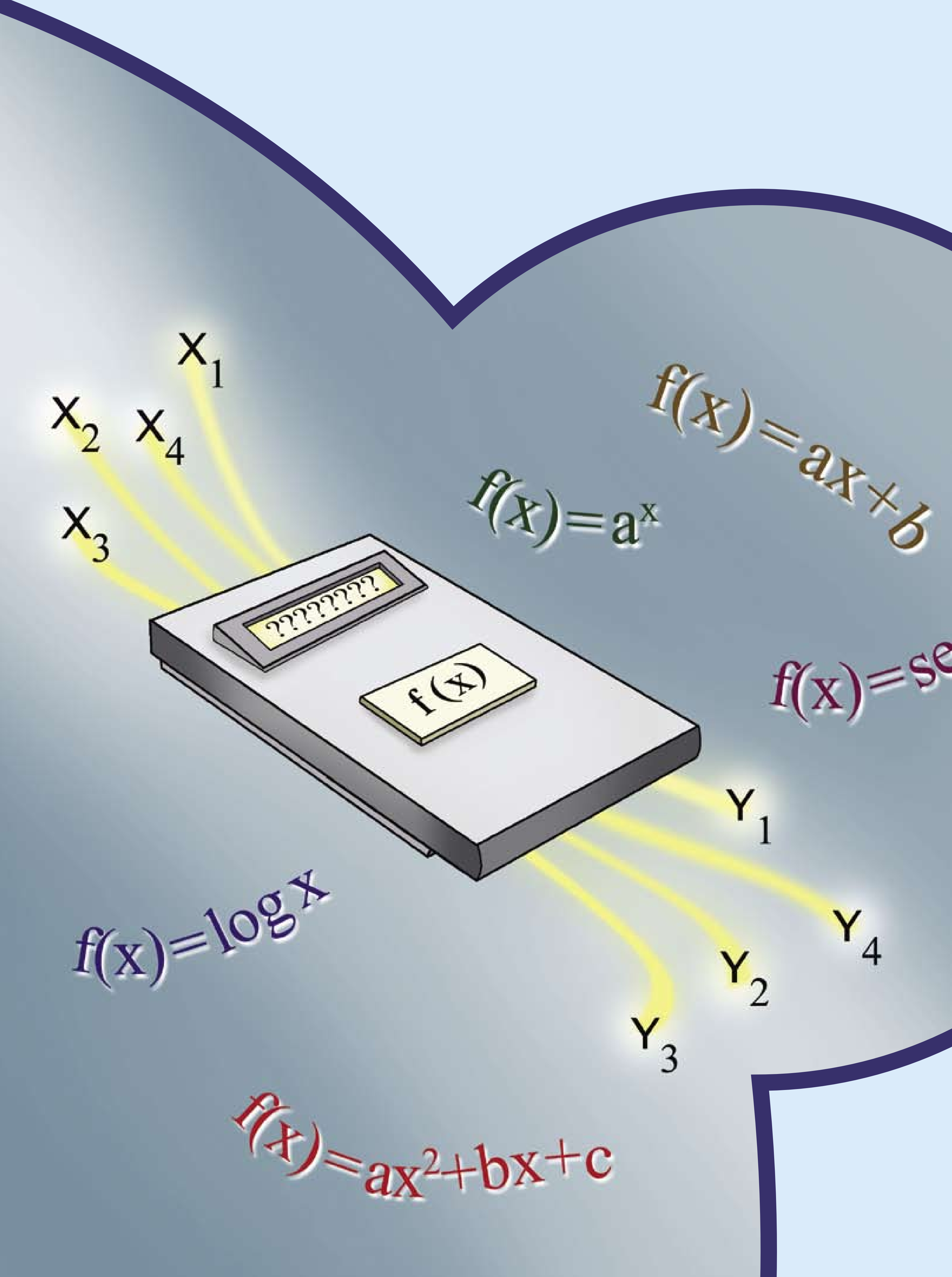
Documentos Consultados *ONLINE*

SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. **Retângulo áureo e o nautilus**. Disponível em: < http://pessoal.sercomtel.com.br>. Acesso em: 14 mar. 2006.

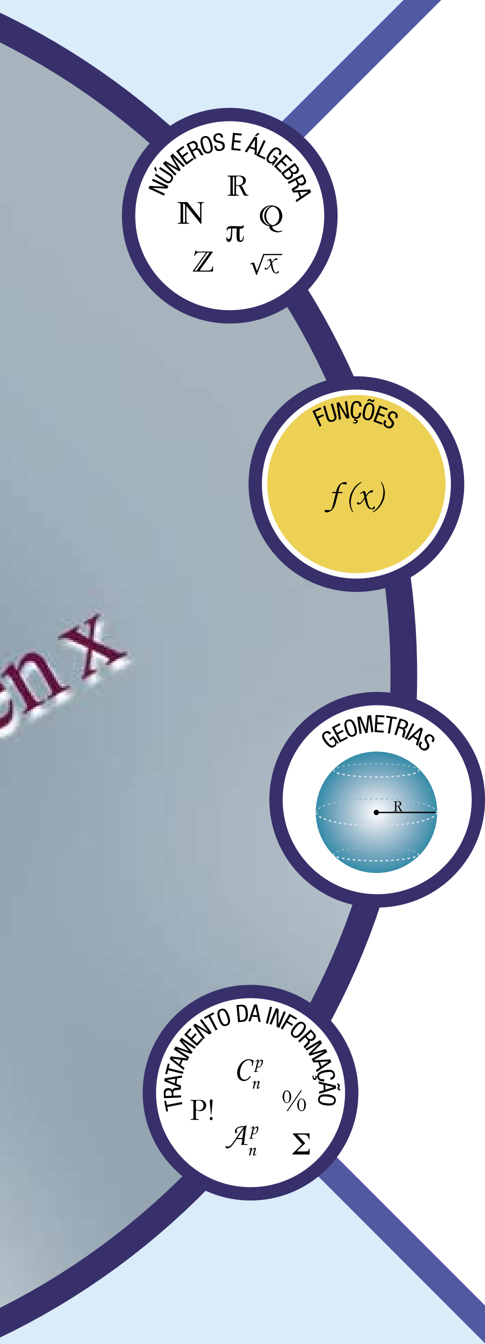
SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. **Ramos de troncos em árvores**. Disponível em: < http://pessoal.sercomtel.com.br>. Acesso em: 18 jan. 2006.

SODRÉ, U.; TOFFOLI, S. F. L. . **Números de Fibonacci**: Problema dos pares de coelhos (paria coniculorum). Disponível em: < http://pessoal.sercomtel.com.br>. Acesso em: 21 jan. 2006.

ANOTAÇÕES



X_1
X_2
X_4
X_3
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
??????????
f(x)
$f(x)=se$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$



8

A REDE E O SER

Donizete Gonçalves da Cruz [1]

Você já recebeu alguma proposta para trabalhar em casa ganhando muito dinheiro? Já leu em outdoors frase do tipo ganhe dinheiro fácil? Já recebeu convite para participar de algum negócio em rede com a promessa de ter o dinheiro investido em pouco tempo e em maior quantidade? É possível alguém ganhar dinheiro dessa maneira? Conhece alguém que ganhou dinheiro com este tipo de negócio?

Enfim.....
Negócio em rede é um grande negócio?
Se é, para quem?

[1]Colégio Estadual Santa Cândida - EFM - Curitiba - PR

A matemática é uma ciência fantástica que resolve problemas e desmente a falácia de espertalhões que tentam ganhar dinheiro fácil. Um exemplo é o fato de pessoas que detêm conhecimentos matemáticos e, por meio de cálculos e discussões, esclarecem outras pessoas e contribui para informar sobre mecanismos de funcionamento de, por exemplo, redes de negócios.

Pense na oportunidade de ganhar dinheiro comprando um título de um comércio que funciona baseado numa proposta de *Marketing* de Rede. Hoje é um negócio que está no nosso meio e pode ser que você tenha recebido propostas de entrar nesse meio de ganhar dinheiro. Para muitos, é tentador. Um meio para divulgar informações é a Internet. No dia 24/11/05, ao digitar no Google o termo Marketing de Rede, constatei que existem, aproximadamente, 1 580 000 páginas em português que tratam desse assunto.

O marketing de rede é uma forma de vender produtos e serviços diretamente aos consumidores sem intermediários, dispensando campanhas publicitárias. O método é montar uma estrutura disposta em camadas de distribuidores independentes que, além de vender, distribuem os produtos a outras camadas de pessoas, sendo que, cada pessoa que adquire um destes títulos, tem como meta conquistar mais pessoas, normalmente um número mínimo exigido, para entrarem no negócio. Assim, cria-se uma organização de vendedores independentes com o sonho de multiplicar seus ganhos salariais, uma vez que, sempre que ocorrem vendas, há pessoas ganhando comissões e, quanto mais você vender, mais ganha comissão, ou seja, dinheiro.

Segundo o sociólogo Castells (1999), esses arranjos aparecem, desaparecem e reaparecem de acordo com as variações do mercado. Muitas vezes, em épocas diferentes, a mesma pessoa é empresário e trabalhador assalariado. O que determina se será empresário ou empregado são as circunstâncias do ciclo de negócios e amplitude da rede de relações estabelecidas por essa pessoa, ou seja, quanto maior a rede de relações sociais ou de pessoas inseridas na rede, maior a probabilidade de vendas e negócios a serem realizados.

Não se sabe ao certo como empresas que oferecem vendas em redes obtém alvarás para mercantilizar seus produtos. Entretanto, para que as pessoas decidam entrar numa dessas organizações de vendas, normalmente, exigem que assine um contrato e assumam o compromisso de levar o negócio adiante para que o funcionamento em rede e a lucratividade não sejam prejudicados. Há muitas promessas para os iniciantes no negócio que apontam vantagens que, imediatamente, podem não ser tão perceptíveis e até pouco lucrativas, mas se houver dedicação nas vendas e um trabalho árduo e esforço pessoal persistente, resultados significativos aparecerão e, num futuro próximo, estará recebendo grandes quantidades de dinheiro.

Vamos entender como funciona esse negócio?

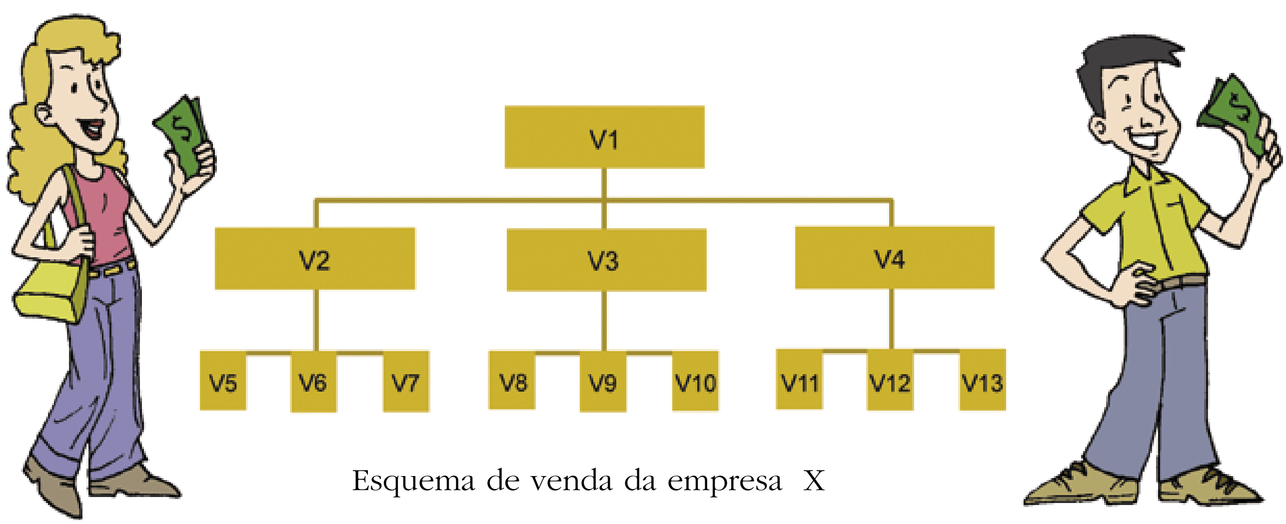
A idéia é a seguinte: você decide montar um negócio em rede, então, de início, convence três pessoas a comprar um produto de sua empresa. Cada uma dessas pessoas, num período de tempo determinado, deve vender três desses produtos. Cada pessoa que comprou do seu comprador deve, no mesmo período de tempo, vender três produtos. E assim, sucessivamente.

Como se ganha dinheiro com esse negócio?

Parte-se da hipótese que três pessoas compram o produto que você vende, sendo que você, pelos três produtos, recebe R$ 300,00. A comissão que cada vendedor recebe é de 10% sobre o valor da venda. O proprietário do produto, evidentemente, recebe, também, o ganho real do produto.

Tomemos que a meta a ser cumprida é conseguir vender, pelo menos, para uma pessoa no período de um mês.

Um esquema poderá ajudá-lo na continuidade da leitura e contribuir para uma melhor compreensão.



Esquema de venda da empresa X

O esquema anterior expressa a idéia da venda em rede, em que o vendedor 1 vende para o 2, 3 e 4. O vendedor 2 vende para o 5, 6 e7. O vendedor 3 distribui para o 8, 9 e 10 e a pessoa 4, que compra do 1, fornece para o 11, 12 e 13. Assim, segue a venda sucessivamente, sendo que o 5 vai vender para mais três, o mesmo acontecendo com o 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13.

ATIVIDADE

Desafio 1

De acordo com as normas da empresa X, cada pessoa que vende produtos recebe uma porcentagem de 10% sobre o que vendeu. Procure descobrir quanto cada pessoa representada no esquema receberá pela venda.

Note que a venda dos produtos da empresa X pode ser representado por uma seqüência numérica: (1, 3, 9, ...). Neste tipo de negócio, existem metas a serem seguidas, isto é, cada pessoa que aderir ao negócio, obrigatoriamente, a cada mês, vai vender para mais três pessoas.

Sendo assim, uma seqüência numérica que, potencialmente, representa a quantidade de pessoas que estarão envolvidas no negócio no decorrer dos meses, pode ser expressa da seguinte maneira:

(1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683, 59 049, ...).

A seqüência acima expressa o que poderá ocorrer, mês a mês até o décimo primeiro mês, caso as pessoas cumpram a meta de, a cada mês, conseguir incluir três pessoas na organização da empresa.

Na seqüência acima, o número 1 representa o primeiro mês; o 3, o segundo mês, o 9, terceiro mês; e assim sucessivamente.

ATIVIDADE

Desafio 2

Complete a seqüência até o vigésimo mês e responda as questões que seguem. Para fazer esses cálculos pode usar a calculadora.

a) A empresa contará com quantas pessoas no 15º mês? E no vigésimo mês?

b) Qual o total de pessoas que entraram na organização desta empresa até o vigésimo mês?

Diante do resultado encontrado no item b do desafio 2, podemos formular algumas idéias a respeito de entrar ou não entrar numa organização em rede, cujo propósito é a venda de produtos e serviços.

ATIVIDADE

Pelos cálculos desenvolvidos no desafio 1, escreva sobre as possibilidades de ganho das pessoas.

Sem dúvida é um conceito de negócio que se presencia no mercado e com forças que parecem invencíveis. O exemplo citado é para caso você monte sua empresa e convença pessoas a comprar seu produto. Entretanto, sabemos que a discussão é mais ampla e temos, com este conceito de empresa, a formação de poderosos monopólios que aglutinam colossais parcelas do mercado, cujo objetivo se caracteriza por produzir e comercializar bens e serviços. Conforme Castells (1999) o conceito de monopólio se aplica aos meios de sobrevivência de pequenas e médias empresas que, muitas vezes, ficam sob o controle de sistemas de subcontratação ou sob o domínio de empresas de grande porte que detêm recursos financeiros e tecnológicos. Aponta o autor que, freqüentemente, pequenas empresas tomam iniciativa de estabelecer relações em rede com empresas grandes, médias e até menores, pois procuram encontrar nichos de mercado e empreendimentos cooperativos.

São organizações que detêm o domínio de setores de produção da economia não só de países, como também, de continentes. São redes que se formam e se orgulham de dizer que possuem o maior portfólio de produtos de algum segmento da economia. Castells (1999) escreve que essa forma de praticar negócios remodela a base material da sociedade num ritmo rápido (segmentos de alimentos, automobilísticos, informática, materiais esportivos e outros).

Normalmente são mega redes internacionais que incorporam grandes volumes de capital, sufocam o mercado nacional, exploram a força produtiva, suprimem fontes de trabalho pela otimização dos meios de produção, sobrando, para muitos, a oportunidade de entrar, nessas e em outras redes, e tentar sobreviver das comissões, ou seja, das migalhas do capital transnacionalizado.

Nos parece que este tipo de negócio cria outra linguagem. Enquanto, na nossa cultura, falamos em conta corrente e poupança, esses setores, em se tratando de economia, proporcionam descrever uma realidade diferente e distante da grande maioria da população. É muito comum, no meio deles e na mídia, retratar os investimentos em ações negociadas nas bolsas de valores, tais como a de São Paulo – Bovespa - e Nova York – NYSE.

Este conceito de empresa se fundamenta no discurso que junções de empresas representantes de um certo segmento da economia traz posição de liderança e isto é fundamental para os produtos serem competitivos com outros produzidos por outras redes gigantes do setor.

Se orgulham em falar que a fusão garante liderança e participação crescente no mercado, pois investem em tecnologias, de forma que produtos e serviços sejam executados e ofertados com qualidade.

Ainda falam que este conceito de empresa proporciona divisas para o país onde se encontram instaladas, uma vez que tais organizações possuem forças capazes de ultrapassar as fronteiras do país e difundir as principais marcas nacionais em todas as partes do mundo.

Aqui escrevo uma passagem de Forrester (1997, p. 30). Servirá para levantarmos uma boa discussão.

> Essas redes econômicas privadas, transnacionais, dominam então cada vez mais os poderes estatais; muito longe de ser controladas por eles, são eles que controlam e formam, em suma, uma espécie de nação que, fora de qualquer território, de qualquer instituição governamental, comanda cada vez mais as instituições dos diversos países, suas políticas, geralmente por meio de organizações consideráveis como o banco mundial, o FMI ou a OCDE.

Não nos restam dúvidas que seus princípios e metodologia acumulam capital em progressão que, às vezes, fogem de nossa realidade de leitura. Seus lucros ultrapassam a casa dos milhões, chegando a bilhões e, na maioria dos casos, avaliados em dólares. Outra situação passível de debate, ou seja, a moeda do país nacional se torna supérflua nas transações comerciais. É a supressão dos bens culturais de um país – é a soberania nacional em cheque.

Sobre as economias mundializadas, salienta Forrester (1997, p. 27).

> Eles governam a economia mundializada por cima de todas as fronteiras e todos os governos. Os países, para eles, fazem o papel de municipalidades. (...) Para obter a faculdade de viver, para ter os meios para isso, é preciso responder às necessidades das redes que regem o planeta, as redes de mercado. (...) A vida, portanto não é mais 'legítima', mas tolerada.

Dependendo da forma de uso do capital ocorre a degradação e anulação do ser humano.

> Quando jovem, uma energia que é imediata e incessantemente desprezada, castrada; quando velho, uma fadiga que não encontra lugar de repouso, o mínimo bem estar, nem a menor consideração. (...) Cada um é prisioneiro do corpo a alimentar, abrigar, cuidar, fazer existir e que incomoda dolorosamente. (...) E não há pior horror que o fim de si próprio quando ocorre bem antes da morte e se deve arrastar enquanto vivo (FORRESTER, 1997, p. 36-37).

DEBATE

Dizem que as empresas que funcionam em rede produzem produtos com preços competitivos. Estes produtos estão ao alcance da população? E os lucros gerados por estas empresas, de que forma cooperam com a sociedade?

Para ilustrar ainda mais nosso estudo que aborda progressões, podemos trabalhar com um campo do conhecimento que há muito nos chama a atenção. Afinal, quem não gosta de música? Nos parágrafos anteriores, partindo da pergunta *Enfim.....Negócio em rede é um grande negócio? Se é, para quem?*, levantamos uma discussão interessantíssima que pode contribuir significativamente para formação de opiniões.

Tal como a discussão levantada é interessante, a música também exerce um papel importantíssimo na formação de opiniões e na educação de uma sociedade. Normalmente, as lutas que objetivam minimizar problemas de ordem social, encontram sentido em alguma música e a adota como bandeira de luta. Foi assim que muitos jovens do nosso país ganharam as ruas, lutando contra, por exemplo, o regime militar.

Alguém se lembra da música *Para não dizer que não falei das flores*, de Geraldo Vandré? Converse com colegas e professor e procure descobrir o que esta música representou para a juventude que viveu aquele momento.

ATIVIDADE

Ouça a música *Para não dizer que não falei das flores*. É uma música que faz parte da história do nosso país.

Que questionamentos ela trouxe para sociedade brasileira da época e o que aconteceu com Geraldo Vandré?

A música se expressa por meio de várias significações na nossa vida. Sem dúvida, é uma manifestação interessante e criativa do espírito inventivo humano. Há diferenças entre tipos de músicas, tais como, a música de uma orquestra sinfônica, de um grupo de rock e de um grupo que canta música popular brasileira – MPB. No entanto, todas possuem a mesma base, ou seja, são formadas pela seqüência dó, ré, mí, fá, sol, lá, sí, dó, que se fazem e se expressam por meio de relações matemáticas.

Para pensar:

Mas o que tem haver o nosso tema de estudo com a música de Geraldo Vandré e com outras tantas músicas?

Já ouviu falar de escalas musicais?

Já pensou como é elaborada a melodia de uma música?

Quando ouvimos uma música, quer seja num CD ou no rádio, é bem possível que não paramos para pensar no processo que levou à sua produção. Ou seja, alguém escreveu a letra. Possivelmente outro profissional a leu e *procurou dar a primeira cara*, isto é, pensou no ritmo, na melodia e na harmonia. É bem provável que outro profissional pensou nos acordes e na formação dos acordes que se encaixa naquela letra. É provável, ainda, que a qualidade do som envolveu outro profissional. Enfim, nota-se que até ouvirmos uma música há um trabalho que requer tempo e dedicação de vários profissionais.

A música, como toda obra de arte, é constituída pela realidade social, representa parte dela, transcendendo-a. Como obra de arte, também, se constitui numa nova realidade que se insere na sociedade por se configurar como expressão da atividade humana, produto do imaginário das pessoas, decorrentes de suas experiências vividas. Incorpora elementos da realidade, assumindo, dessa forma, um caráter de produto social (KOSIK, 2002).

Ao ouvirmos uma música, a percepção que nossos ouvidos têm do som depende do número de vibrações por segundo. Isto significa que a nota é diferenciada pelo número de vibrações da corda ou outro instrumento sonoro, recebendo o nome de Freqüência. Então, pode-se dizer que a escala musical corresponde ao conjunto de Freqüências que caracteriza as várias notas musicais. São as vibrações de uma corda de violão, por exemplo, que produzem uma Freqüência que se manifesta numa relação matemática em progressão, definindo assim, o som que vamos ouvir.

Para uma boa qualidade do som, há necessidade que o instrumento musical esteja bem preparado. Nos instrumentos de cordas, por exemplo, há necessidade das cordas estarem bem afinadas para produzirem ótima Freqüência sonora. O padrão de esticamento é medido pela unidade Hertz, que são pulsos de Freqüência sonora. A unidade Hertz (Hz) determina o comprimento da onda sonora e envolve a Freqüência do som. A audição normal é aquela que se situa entre 250 a 4 000 Hertz.

Na música, a nota *lá* é utilizada como referência e a Freqüência produzida é equivalente a 440 Hz. Desse modo, estabelece-se a Freqüência das outras notas musicais.

Entendendo melhor:

Vamos utilizar o exemplo da escala dó. Ela inicia em dó e termina em dó. Assim: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó, configura-se numa oitava.

Pelo motivo da repetição, uma nota de uma determinada escala é chamada de oitava da mesma nota na escala anterior.

A maioria das músicas ouvidas no ocidente, a escala musical é a temperada ou cromática e pode ser definida como uma seqüência matemática, cujo primeiro termo é a Freqüência da nota escolhida, ou seja, número de oscilações por segundo. Os músicos dividiram as oitavas em doze intervalos. Em uma oitava, após 12 intervalos, a Freqüência dobra. Como dobra?

Para entender melhor a informação acima:

Na escala os intervalos são iguais. A nota posterior é obtida pela multiplicação do número da nota anterior até que resulte igual a dois. Sabemos que os músicos dividiram as notas em 12 intervalos. Então podemos escrever:

i = intervalo

$i^{12} = 2 \rightarrow 2$ porque, em cada oitava, após 12 intervalos, a Freqüência dobra.

Então perguntamos: qual o número que elevado a 12 é igual a dois. Aplicando a operação inversa da potenciação – a radiciação, temos: $i = \sqrt[12]{2}$. Também podemos escrever assim: $i = 2^{1/12}$.

Observe o quadro a seguir:

Johann Sebastian Bach compôs a música O Cravo Bem Temperado no período de 1722 a 1744, utilizando o sistema proposto por Mersenne (1635) de afinamento suave. Este sistema denomina-se escala temperada composta por 12 intervalos (ABDOUNUR, 1999).

Quadro 1

Nota	dó	dó#	ré	ré#	mi	fá	fá#	sol	sol#	lá	lá#	si	dó escala acima
Temperado	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{11/12}$	$2^{11/12}$	$2^{12/12}$
Freqüência	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494	523

ATIVIDADE

Em grupo, complete a coluna C e D. Pode fazer a divisão com a calculadora.

Divida 1,0595 por 1,0000 e complete a célula de encontro da coluna C com a linha dó; 1,1225 por 1,0595 e complete a segunda célula da coluna C com a linha dó#. Divida 277 por 262 e complete a célula de encontro da coluna D com a linha dó. Continue a divisão do termo posterior pelo anterior até completar todas as células em branco.

Considere, na coluna C, sempre, 4 casas decimais após a vírgula. Na coluna D, sempre, duas casas após a vírgula. Fique atento que na coluna D requisita-se conceitos matemáticos para arredondamento.

Quadro 2

Nota	Temperado	C	Freqüência	D
dó	1,0000		262	
dó#	1,0595		277	
ré	1,1225		294	
ré#	1,1892		311	
mi	1,2599		330	
fá	1,3348		349	
fá#	1,4142		370	
sol	1,4983		392	
sol#	1,5874		415	
lá	1,6818		440	
lá#	1,7818		466	
si	1,8877		494	
dó escala acima	2,0000		523	

PESQUISA

Agora responda:

a) Na matemática, o número encontrado na coluna C e na coluna D recebe uma denominação formal.

Investigue nos livros de Matemática qual é esta denominação.

Pesquise sobre a função sobre a função que as progressões exercem na percepção que temos de uma música.

Lembramos que tanto na seqüência do negócio em rede como nas seqüências formadas pela vibração das cordas de um violão, por exemplo, para responder as questões que aparecem nessa produção, podemos atribuir outro tipo de tratamento matemático.

Vamos nos ater à seqüência do negócio em rede, (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683, 59 049...). Nela, o número 1 pode ser chamado de a_1, o número 3 de a_2, o número 9 de a_3, e assim sucessivamente.

ATIVIDADE

Então, outras questões podem ser elaboradas. Antes de usarmos a notação que acabamos de adotar, vamos encontrar respostas para as questões que seguem:

a) Na seqüência (1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, 19 683, 59 049, ...), para encontrarmos o termo posterior há uma operação matemática. Que operação é essa?

b) Também é possível perceber que partindo do 1 para chegarmos ao 3 e do três para chegarmos ao 9, a operação que se realiza envolve um número. Que número é esse?

c) Já chamamos 1 de a_1, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$ e $a_5 = 81$. Agora faça alguns cálculos:

c_1) $a_2 - a_1 =$; $a_3 - a_2 =$; $a_4 - a_3 =$; $a_5 - a_4 =$.

c_2) $\dfrac{a_2}{a_1} =$; $\dfrac{a_3}{a_2} =$; $\dfrac{a_4}{a_3} =$; $\dfrac{a_5}{a_4} =$.

d) Qual a diferença encontrada nos cálculos realizados entre c_1 e c_2? Expresse sua idéia sobre a diferença constatada.

ATIVIDADE

Agora que você conhece os termos a_1, a_2, a_3, a_4 e os demais, discuta com seus colegas e professor como encontrar a resposta para a questão que procura o a_{15} e a soma de todos os termos desta seqüência, sem a necessidade de escrevê-la por inteiro.

Para alimentar essa discussão, vale algumas dicas:

1) $a_2 = 1 \,.\, 3 = 3$. Isto é o mesmo que $a_2 = 1 \,.\, 3^1$?

2) $a_3 = 1 \,.\, 3 \,.\, 3 = 9$. Posso escrever $a_3 = 1 \,.\, 3^2$?

3) $a_6 = 1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 243$.

Posso escrever $a_6 = 1 \,.\, 3^5$?

Como estamos denominando o número 1?

Qual a relação que existe entre a_6, a_1 e o expoente 5?

Pode ser $a_6 = 3 \,.\, 3^4$?, ou seja, $a_6 = a_2 \,.\, 3^4$?

Neste caso, qual a denominação do número 3?

Qual a relação que existe entre a_6, a_2 e o expoente 4?

E se for $a_6 = 9 \,.\, 3^3$? É possível?

Neste caso, como denominamos o número 9?

Qual a relação que existe entre a_6, a_3 e o expoente 3?

É possível $a_6 = 27 \,.\, 3^2$?

Como denominamos o 27?

Qual a relação que existe entre a_6, a_4 e o expoente 2?

Com seus colegas, busque respostas para as questões abaixo:

Esta produção tratou de progressões. Na matemática temos progressão aritmética e geométrica.

Esta produção tratou de:

a) Uma progressão aritmética? ( ) Sim ( ) Não. Explique sua resposta.

b) Uma progressão geométrica? ( ) Sim ( ) Não. Explique sua resposta.

c) O que tem de geometria numa progressão geométrica?

ATIVIDADE

Investigue quais são as possíveis maneiras de encontrar os termos e a soma dos termos de uma seqüência deste tipo.

DEBATE

Depois de ter lido e trabalhado o conceito de progressão, expresse sua opinião sobre entrar ou não em negócio que se fundamenta no conceito de marketing de rede.

Referências Bibliográficas

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música**: o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: escrituras editora, 1999. 333 p.

FORRESTER, V. **O horror econômico**. Tradução: LORENCINI, A. 7ª ed. São Paulo: UNESP, 1997.

CASTELLS, M. **A sociedade em rede**. Tradução: MAJER, R. V. 3ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

KOSIK. K. **Dialética do Concreto**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

Obras Consultadas

MARX, K.; FRIEDRICH, E. **Marx e Engels: textos sobre educação e ensino**. Tradução: FRIAS, R. E. 4. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

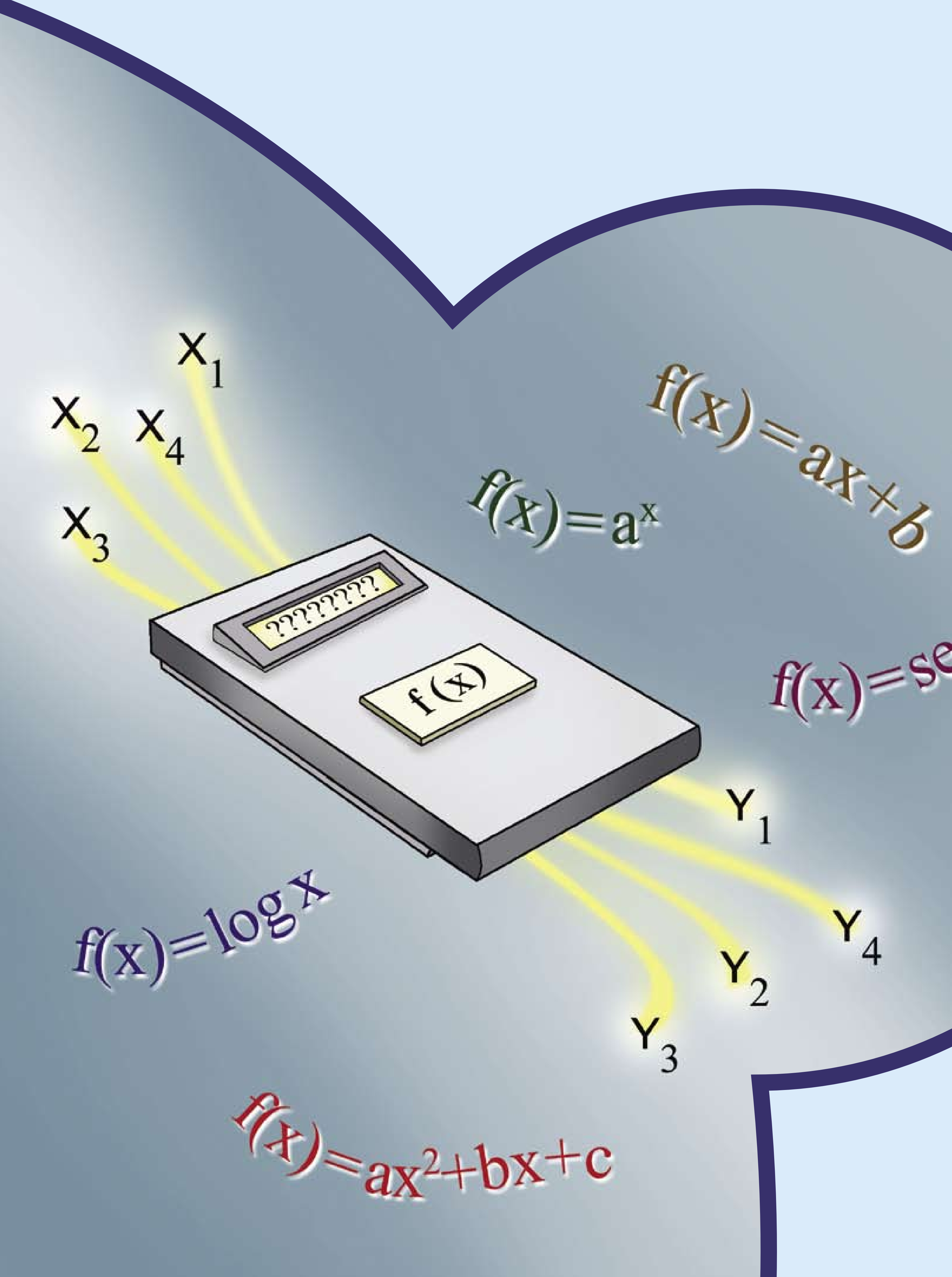
LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v. 2.

DUSSEL, E. **Ética comunitária**: a libertação na história. 2ª ed. Petrópolis: Vozes, 1987.

CRUZ, D. G. **O estudo da abordagem metodológica no livro didático matemática fundamental das funções de 1º e 2º graus numa visão histórico-crítica**. Cascavel, 1997. 116 f. Monografia (Especialização em Ciências Exatas). Setor de ciências exatas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

MANOSSO, M. V. B. **O ensino de progressões**: conceituação, manipulação e aplicação no ensino médio. Curitiba, 2002. 55 f. Monografia (Especialização em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná.

PAULA, C. A. **Como fazer a cobra subir**: Projeto Folhas. Curitiba: Seed, 2005.



x_1
x_2
x_4
x_3
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
?????????
$f(x)$
f(x)=se
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$

9

VENHA NAVEGAR POR OUTROS MARES!

Neusa Idick Scherpinski Mucelin[1]

Muitos livros registram que foi Pedro Álvares Cabral quem "descobriu" o Brasil.

O Brasil foi mesmo "descoberto"? Independente de nossa opinião a esse respeito, sabemos que Cabral esteve aqui, e que isso aconteceu em 1500.

Como ele conseguiu localizar o Brasil para tomar posse das nossas terras? Como, naquela época, os navegadores se orientavam em mar aberto?

[1]Colégio Estadual João Manoel Mondrone - EFM - Medianeira - PR

A palavra **cosmologia** é composta de duas outras: cosmos, que significa mundo ordenado e organizado, e logia, que vem da palavra logos, que significa pensamento racional, discurso racional, conhecimento. Assim, a Filosofia nasce como conhecimento racional da ordem do mundo ou da Natureza, donde, cosmologia.

Marilena Chaui, Convite à Filosofia.

Inquisição é um termo que deriva do ato judicial de «inquirir», que significa perguntar, averiguar e foi uma instituição da Igreja Católica para combater a heresia. Heresia é qualquer doutrina contrária aos dogmas da Igreja Católica.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/

O problema da orientação para a navegação está relacionado de modo muito forte com a necessidade de medir distâncias de objetos inacessíveis. Isso acontece porque as rotas das navegações eram traçadas em função da orientação do navio em relação às estrelas que eram consideradas "fixas" e usadas como pontos de referência.

Astrônomos gregos, mais de trezentos anos antes de Cristo, já tinham a necessidade de medir distâncias entre dois lugares, um deles estando inacessível. Por exemplo, a distância da Terra até a Lua, ou a distância de um lado até o outro lado de um rio bastante largo.

Na Antigüidade já existia a preocupação com o movimento dos astros. Segundo a História da Filosofia, são os gregos que, inicialmente, tentam explicar o movimento dos astros. O modelo astronômico de Aristóteles (384-322 a.C.), que era o geocêntrico, baseou-se na **cosmologia** de Eudoxo (400-347 a.C), um discípulo de Platão (428-347 a.C.). Os modelos propostos pelos gregos eram geocêntricos e o único que propôs um modelo heliocêntrico foi o Aristarco de Samos (310-230 a.C.).

No século XVI, Nicolau Copérnico (1473-1543) publicou uma obra que propunha a teoria heliocêntrica, esse período foi marcado pela **Inquisição** e sua teoria teve pouca repercussão, posteriormente Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630) retomaram esses estudos de forma mais marcante na história.

Eratóstenes (276-196 a.C.) estimou a medida da circunferência da Terra com uma boa aproximação para a medida que conhecemos hoje (ÁVILA, 1982).

PESQUISA

Aliás, você qual é a medida da circunferência da terra? Como ela é medida hoje? Procure pesquisar essa resposta e trazer para a sala de aula; devemos tentar descobrir quão próximo esteve Eratóstenes do valor adotado hoje. Mas você sabe quem foi Eratóstenes?

Espere um momento: acabamos de comentar que um grego calculou a "circunferência da Terra". Isso não quer dizer que eles achavam que a Terra era redonda? Mas como pode? Os marinheiros tinham medo de acompanhar os grandes navegadores, Cristóvão Colombo e Cabral, entre outros, porque acreditavam na idéia que a terra era plana. Apesar dos gregos já possuírem o conhecimento de que a terra era redonda, há mais de 2000 anos, grande parte dos estudos sobre esse assunto, se perdeu após desestruturação do império romano do ocidente, no século VII. Nesse período, propagavam-se idéias oriundas de interpretações literais da bíblia, onde a hipótese da esferecidade da terra, era considerado um conhecimento pagão.

Além da civilização ocidental, outros povos, como os chineses, também acreditavam que a terra era plana, passando a discutir o fato de que a terra era redonda, somente a partir do século XVII. Sabemos hoje que a terra tem o formato esférico, achatada nos pólos, ou seja, tem um formato geóide.

Estabelecer distâncias muito grandes, como entre a terra e a lua e o raio da terra, por exemplo, caracterizou-se um grande desafio para muitos estudiosos ao longo da história das civilizações, pois tratam-se de distâncias entre pontos que não estão acessíveis.

A trigonometria, que relaciona as medidas dos ângulos de um triângulo com as medidas dos seus lados, trouxe importantes contribuições para que o homem pudesse resolver cálculos envolvendo grandes distâncias.

Não se sabe ao certo, a origem da trigonometria, mas pode-se dizer que seus conceitos fundamentais surgiram em função da necessidade de resolver problemas associados, principalmente, à Astronomia, aproximadamente no V a.C.

Curiosidade: Nos navios era comum a presença de um matemático para auxiliar nos cálculos das rotas de navegação e na localização em alto mar.

Na antiguidade, cálculos envolvendo grandes distâncias, como a medida da terra a lua, por exemplo, era realizado por triangulação, utilizando o diâmetro da terra como linha base. Hoje, sabe-se que esse tipo de cálculo, é feito através de radar.

No período que envolveu as grandes navegações, como a chegada dos portugueses ao Brasil, pode-se dizer que a trigonometria teve um papel fundamental, fornecendo um suporte matemático para que os portugueses pudessem se lançar ao mar aberto.

As questões ligadas à Astronomia eram de grande importância naquela época, pois a evolução do comércio entre povos distantes exigia o domínio de técnicas de navegação, e as rotas eram traçadas tendo como referência as estrelas.

PESQUISA

Você sabe o que o termo trigonometria significa? Que tal fazer uma pesquisa e discutir com o seu professor?

É a partir das relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo que foi possível realizar cálculos de rotas, com vistas a deslocamentos no nosso planeta. No mundo de hoje, estas aplicações podem ser percebidas em nosso cotidiano. Por exemplo, quando um avião Boeing decola de Foz do Iguaçu com destino ao Canadá, são utilizados computadores para traçar a rota, calcular o tempo, a velocidade, as interferências climáticas, entre outras. No entanto, estes computadores fazem os cálculos através dos mesmos princípios trigonométricos, embora as novas tecnologias possibilitem cálculos mais precisos do que na época das navegações. Hoje são utilizados como referências o Sistema de Posição Global (GPS) e o sensoriamento remoto através de satélites, e não mais as estrelas.

Mas você sabe o que é sensoriamento remoto e sistema de posição global?

Vamos tentar desvendar alguns dos mistérios da trigonometria?

Suponha que você é comandante de um navio em alto mar e que o mesmo esteja navegando sempre no mesmo sentido (Norte); até que, num determinado ponto, avista-se um farol em uma ilha.

Você precisa saber qual é a distância do seu navio até a ilha para evitar colidir com arrecifes.

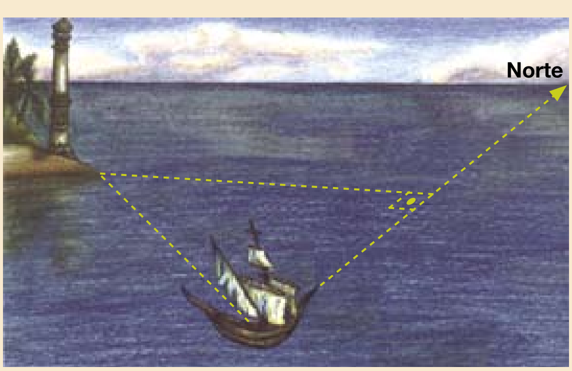
Como calcular esta distância?

Você pode, por exemplo, observar um ponto fixo na ilha. Que tal o farol?

Através de um equipamento apropriado, você descobre que o ângulo formado pela linha imaginária que une o navio ao farol com a direção do navio (Norte) é 60º. O navio continua a navegar no mesmo sentido, até que o ângulo formado pela sua trajetória em direção ao Norte com a linha imaginária que o une ao farol seja igual a 90º. Se até este momento a distância percorrida for de 20 km, é possível determinar a distância entre o navio e o farol na ilha?

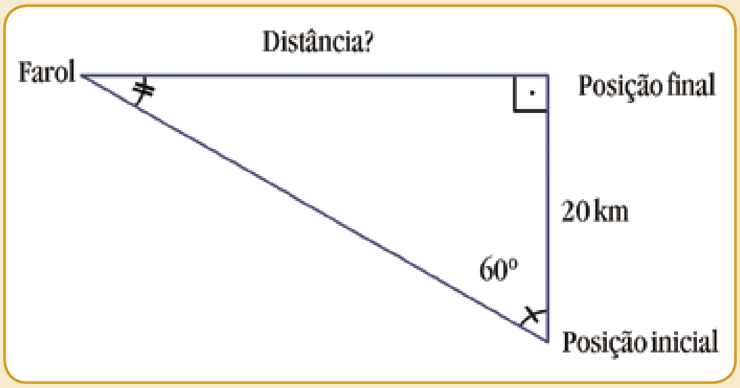
ATIVIDADE

Observe a figura a seguir. Você sabe como calculá-la? E se andasse mais 30 quilômetros?



Desenho: Patrícia Carla Mucelin

Um desenho pode contribuir para nossa leitura e compreensão. Então observe o desenho anterior, ele pode ser adaptado de modo a simplificar a interpretação do problema:



Quais são as relações trigonométricas válidas para este tipo de triângulo?

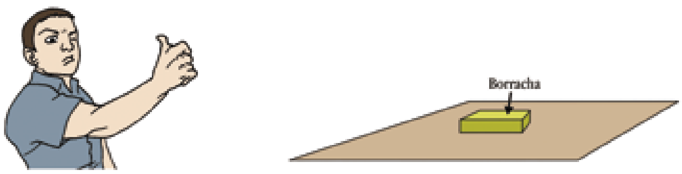
Tente fazer os cálculos.

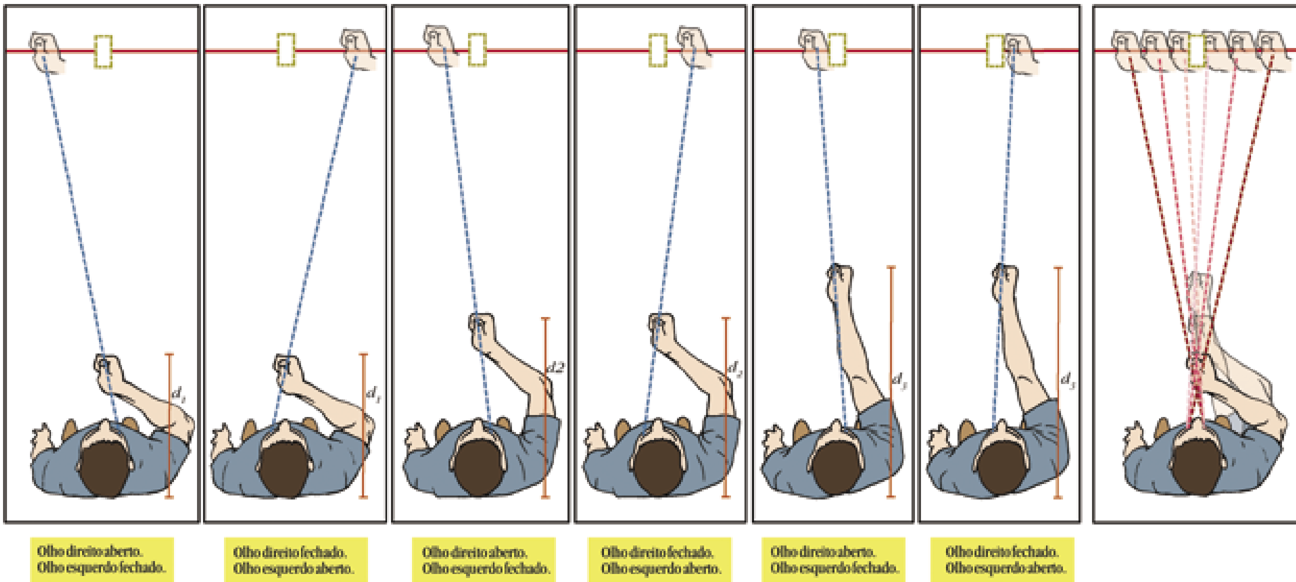
Um dos métodos utilizados para localização e cálculo de distâncias astronômicas é a paralaxe. A criação da noção de paralaxe é atribuída a Apolônio (HOGBEN, 1970).

Paralaxe é a mudança de posição aparente de um objeto em relação a um segundo ponto de referência mais distante, quando esse objeto é visto a partir de ângulos diferentes.

Para você entender de modo mais simples, vamos fazer uma experiência? Levante a ponta do polegar e, com um olho fechado, alinhe a ponta do polegar entre o livro ou objetos sobre uma mesa. Agora, sem mudar de posição, olhe para ponta do polegar fechando o olho aberto e abrindo o outro olho. A ponta do polegar parecerá estar numa posição diferente em relação ao segundo plano. O fundo, porém, não parece sofrer esse "deslocamento". O aparente movimento varia em função da distância entre a ponta do polegar e o olho. Quanto mais próximo, mais a ponta do polegar parecerá se mover. A metade do ângulo sob o qual é visto um objeto de dois pontos diferentes é chamada paralaxe desse objeto (SILVA, 2005).

Veja a figura a seguir.





Os astrônomos utilizam o método de paralaxe para calcular a distância da Terra a um astro. Mas como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande para minimizar erros, como, por exemplo: para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos, podemos utilizar o diâmetro da Terra como linha de base; e para medir a distância de estrelas próximas, podemos usar o diâmetro da órbita da Terra.

Mas por que minimizar erros?

Observe na figura anterior que à medida que o ponto de base vai se afastando, o ângulo fica cada vez menor. E, portanto, para distâncias muito grandes, este ângulo tende a ser muito pequeno e de difícil medição.

Como a paralaxe depende da altura do astro e da distância à Terra, sua aplicação só tem interesse prático no caso de se observar o Sol ou a Lua, Vênus ou Marte; para outros, muito mais afastados, o seu valor é desprezível (BARROS, 2001).

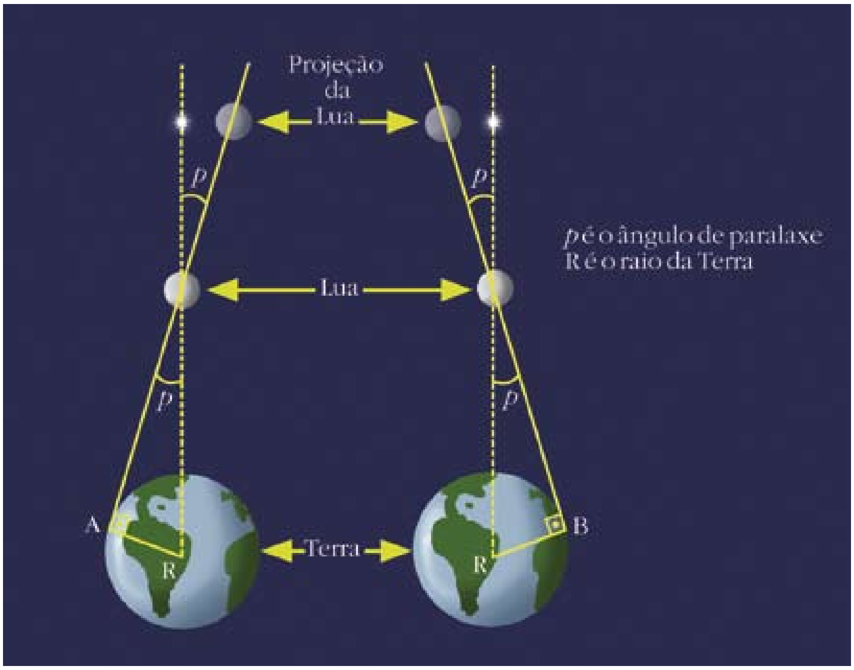
Como é na prática a aplicação deste método?

Como calcular a distância Terra-Lua?

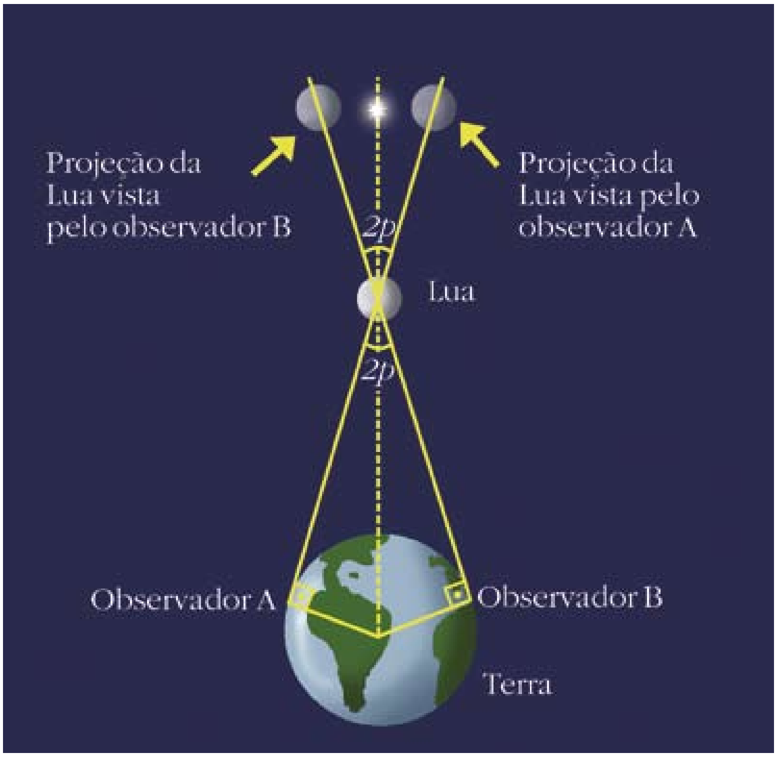
Conhecidos o raio da Terra, podemos calcular a distância entre dois observadores situados em latitudes e longitudes dadas; basta, então, a determinação da paralaxe da Lua para obter a distância entre a Terra e a Lua (HOGBEN, 1952).

Na prática, podemos nos basear na comparação de observações da Lua com uma estrela que esteja próxima a ela num determinado instante. Dois observadores em pontos extremos da Terra (A e B) vêem a Lua em posições diferentes em relação a estrela.

Veja a figura a seguir.

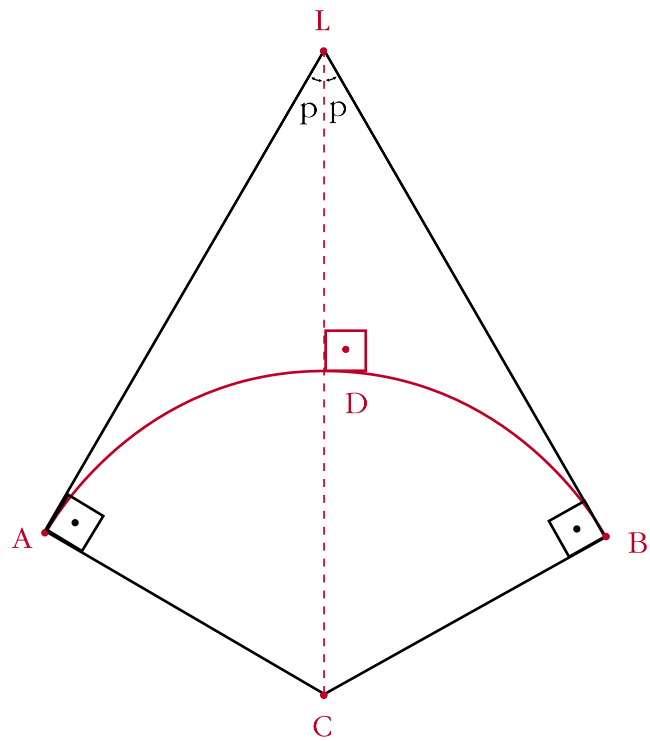


O observador A vê a Lua numa posição aparentemente diferente da posição vista pelo observador B. Cada observador tem uma visão ligeiramente diferente do céu. Esta situação pode ser representada na figura a seguir, quando é projetada a posição da Lua com relação a estrela, vistas dos pontos extremos da terra (A e B).



Os dois observadores ao fotografarem a Lua nas suas posições, obterão uma medida de ângulo p, que é o ângulo formado na estrela entre o observador e a Terra. Ao compararem suas fotos com um bom atlas celeste, poderão obter a medida do ângulo 2p, conforme indica a figura anterior.

Agora, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, é fácil ver que o seno de p (um valor conhecido) será igual ao raio da Terra (também conhecido) dividido pela distância do centro da Terra até a Lua (a incógnita). Veja a figura:



Conforme a figura podemos observar que:

-o raio da terra AC é o cateto oposto a p

-AL ou BL é a distância do observador A ou B até Lua

-CD = AC é o raio da terra

-CL é a distância do centro da Terra até a Lua

Lembrando que

$$sen\ p = \frac{cateto\ oposto\ a\ p}{hipotenusa}$$

teremos:

$$\text{sen p} = \frac{AC}{CL} \quad \text{ou sen p} = \frac{\textit{raio Terra}}{\textit{distância do centro da Terra a Lua}}$$

ou

$$\text{Distância da Terra a Lua} = \frac{\textit{raio Terra}}{\textit{sen } p}$$

Para calcularmos a distância de um determinado ponto da Terra, ortogonal à posição da Lua (ponto D), teremos que subtrair o segmento CD, ou seja o raio da Terra.

Assim, $\dfrac{\textit{raio Terra}}{\textit{sen } p}$ - raio da terra

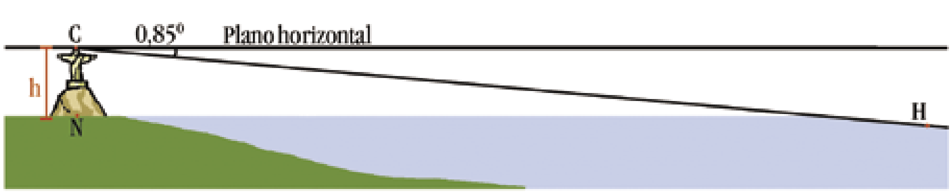
PESQUISA

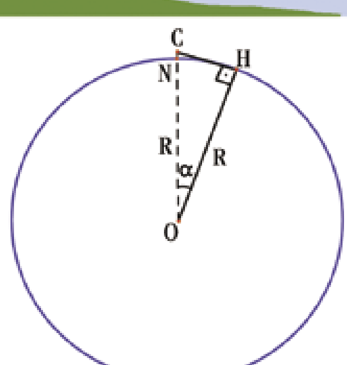
Realize uma pesquisa de como Hiparco (190-120 a.C.) calculou a distância da Terra-Lua. Você pode utilizar o site *http://www.zenite.nu*.

E que tal agora calcular o raio da terra? Vai ser moleza! A montanha onde está o Cristo Redentor no Rio de Janeiro tem aproximadamente 703 m de altura (h) em relação ao nível do mar (N). Lá de cima do Cristo Redentor, utilizando um teodolito (instrumento de medir ângulos), um observador (C) vê no horizonte o mar (H) segundo um ângulo de 0,85° com o plano horizontal. Encontre uma medida aproximada para o raio da terra (R), pesquise, nos livros de física ou geografia, qual é o raio da terra e compare com a medida encontrada por você (LIMA, 2005).

Para começar, se você fizer um desenho, irá ajudar a compreender melhor este problema.

Observação: O desenho não esta em proporções reais.





Como o triângulo OCH é retângulo (com $C\hat{H}O = 90^o$), você pode calcular $cos\ \alpha$.

Está bom! Vou lhe dar uma chance! $cos\ \alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$,

ou seja, $cos\ \alpha = \dfrac{R}{R + h}$

Substitua α por $0{,}85^o$ e h por 0,703 km. Agora as contas são com você!

Afinal, qual foi a medida que você calculou? Ela é muito diferente da medida do raio da terra utilizada hoje?

DEBATE

Uma pessoa no interior de um barco, que navegava em águas calmas, sem olhar para fora, se perguntava: o navio está se movendo? Ou está em repouso? Como posso perceber o movimento do barco em relação ao nosso planeta?

PESQUISA

Realize uma pesquisa sobre as leis de Kepler, descrevendo cada uma.

As leis de Johannes Kepler (1571-1630) não explicavam a razão das trajetórias dos planetas; assim, Issac Newton (1642-1727) publicou, em 1687, os "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", que abordavam as bases da Física Clássica, com a lei de atração gravitacional que explicava os movimentos dos planetas em torno do Sol.

Que tal descobrir um pouco mais sobre a ciência por trás dos descobrimentos?

No século XIV, com a expansão da navegação oceânica, as fronteiras do mundo moderno se alargaram. A superioridade tecnológica européia favoreceu a conquista de outras terras e o contato com outros povos. Com isto, a integração de culturas se fez a ferro e fogo, sempre a mercê do dominador.

O aperfeiçoamento dos barcos, a incorporação da trigonometria para o planejamento das rotas em mar aberto e o uso de mapas mais precisos possibilitaram a Portugal o desenvolvimento da navegação. Rompendo com as convenções medievais, as explorações e as observações do mundo real levaram a cartografia portuguesa a destacar-se dentro da Europa. A superioridade da técnica portuguesa deu-se devido ao incentivo ao estudo da matemática e filosofia natural nas universidades. Portanto, o sucesso obtido por Portugal foi conseqüência direta do esforço, do aperfeiçoamento de técnicas de construção naval, do desenvolvimento da trigonometria para o avanço na orientação astronômica e do mapeamento cartográfico (MELO, 2000).

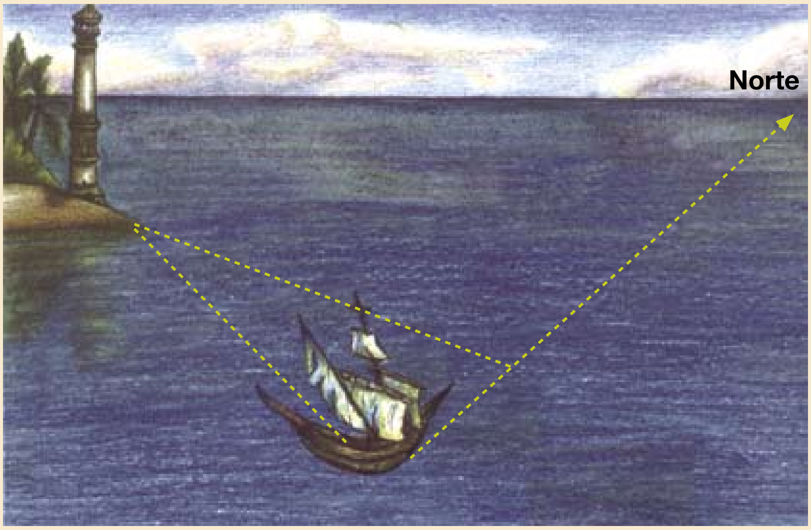
A interrupção progressiva do investimento nas áreas do conhecimento e a progressiva asfixia da liberdade de investigação e do espírito do livre debate foram as causas da eliminação das vantagens que eram asseguradas pela tecnologia portuguesa, e que acabou por levar ao declínio deste período de expansão do reino português. Aliado a isto, a inquisição também interferiu no desenvolvimento científico e tecnológico daquela época, visto que a Igreja perseguia os estudiosos e, se necessário, queimava os escritos na fogueira.

Até agora vimos várias aplicações sobre trigonometria, como a localização em alto mar e as distâncias astronômicas, mas muitas vezes, quando tratamos de situações práticas, nem sempre encontramos triângulos retângulos. Como, por exemplo, no problema de localização em alto mar.

Você sabia que as leis do seno e cosseno são aplicadas quando conhecemos três elementos de um triângulo qualquer, sendo pelo menos um dos elementos o lado?

ATIVIDADE

Suponha que o navio que você comanda, desde o ponto inicial na posição conforme mostra o desenho, em direção ao norte, percorra 10 quilômetros. O navio avista no ponto inicial e no final dos 10 quilômetros, a torre do farol em uma ilha, sob um mesmo ângulo de 75º. Estes ângulos de 75º constituem os ângulos internos de um triângulo. O desenho mostra a situação descrita. A que distância o seu navio está do farol após percorrer os 10 quilômetros?



Desenho: Patrícia Carla Mucelin

Desenhe um triângulo para representar a situação acima ilustrada.

Que tipo de triângulo você obtém?

Quais são as relações trigonométricas válidas para este problema?

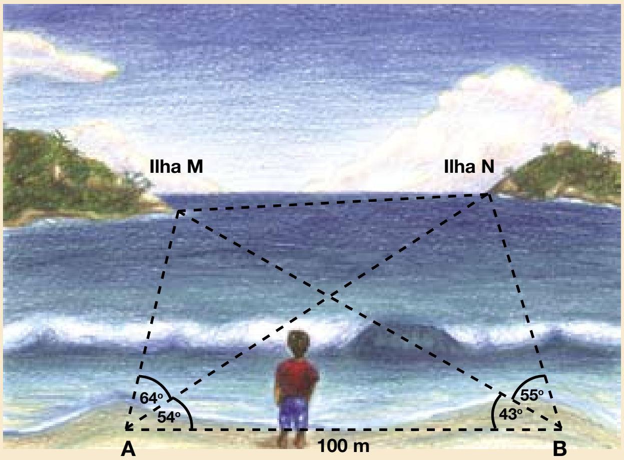
Então, a que distância o navio está do farol? Calcule usando uma das relações trigonométricas para triângulos quaisquer (lei do seno). Mãos a obra!

ATIVIDADE

Desafio você a resolver outro problema de medição de pontos inacessíveis.

Suponha que você esteja numa praia deserta, e que desta praia seja possível ver duas ilhas: M e N. Você marca dois pontos na praia distantes 100 m e, com um instrumento de medir ângulos (teodolito), mede os ângulos conforme a figura.

Qual é a distância entre as ilhas M e N?



Desenho: Patrícia Carla Mucelin

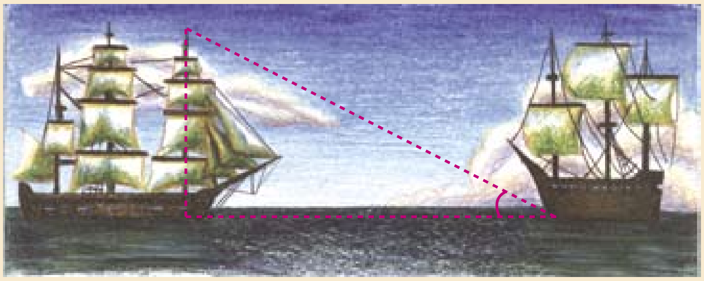
Segundo Crossfield (2004), o cálculo de distâncias inacessíveis era um problema comum apresentado nos livros de ensino da matemática do início do século XIX. Naquela, época os estudantes aprendiam um tipo de trigonometria chamado Alturas e Distâncias, ou "*Altimetry* e *Longimetry*".

Vamos trabalhar com um problema relacionado a este assunto?

ATIVIDADE

Do topo do mastro de um navio, que estava a 80 pés acima da água, se avista um outro navio sob um ângulo de 20° com o nível da água.

Qual é a distância, em metros, entre eles?



Desenho: Patrícia Carla Mucelin

1 pé = 30,48 cm

A trigonometria possibilitou ao homem calcular grandes distâncias na superfície do planeta e construir mapas mais precisos. A trigonometria não se limitou ao estudo da astronomia. Ao longo da História até os dias atuais, são encontradas inúmeras aplicações da trigonometria nas mais diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo: na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina e até na Música.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. **A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga**. Revista do professor de matemática, n. 1., p. 9-13, 2º Semestre 1982.

BARROS, G. L. M. **Navegação e astronomia**: fundamentos e prática. 7ª. ed. Rio de Janeiro: Cataul, 2001. 307 p.

CHAUI, M. **Convite à Filosofia**. 5ª. ed. São Paulo: Ática,1995.

HOGBEN, L. **O homem e a ciência**: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. v. 1, Porto Alegre: Globo, 1952. 606 p.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**: influência e função matemática nos conhecimentos humanos. 2ª. ed. Porto Alegre: Globo, 1970. 762 p. tradução: Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer.

TIPLER, P. A. **Física**. v. 2, Rio de Janeiro: Ganabara, 1984. 587 p.

Obras Consultadas

ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando**: introdução à filosofia. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 1993.

CROSSFIELD, D.; STEIN, R.; SHEPERD, C.; WILLIAMS, G. **Historical Modules Project**: Trigonometry. Washington - DC: MAA, 2004. 191 p.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**. v. 3, São Paulo: Atual, 2004. 226 p.

Documentos Consultados *ONLINE*

BEBER, D. C. **Projeto Trigonometria!** Disponível em: <http://www.ceap.g12.br>. Acesso em: 20 ago. 2005.

FERRAZ NETTO, L. **Feiras de ciência**. Disponível em: <http://www.feiradeciencias. com.br> Acesso em: 15 set. 2005.

LIMA, E. L. **Matemática do ensino médio**. Disponível em: <http://www.ensinomedio .impa.br>. Acesso em: 10 ago. 2005.

MELO, C. P. De. A ciência dos descobrimentos. In: SEMINÁRIO DE TROPICOLOGIA: **O Brasil no limiar do século XXI**. Disponível em : http://www.tropicologia.org.BR> Acesso em: 12 dez. 2005.

OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Disponível em: http://astro.if.UFRGS.BR/. Acesso em: 10 set. 2005.

PHILIPS J. **Eratóstenes**. Disponível em: <http://geodesia.ufsc.br>. Acesso em: 17 out. 2005.

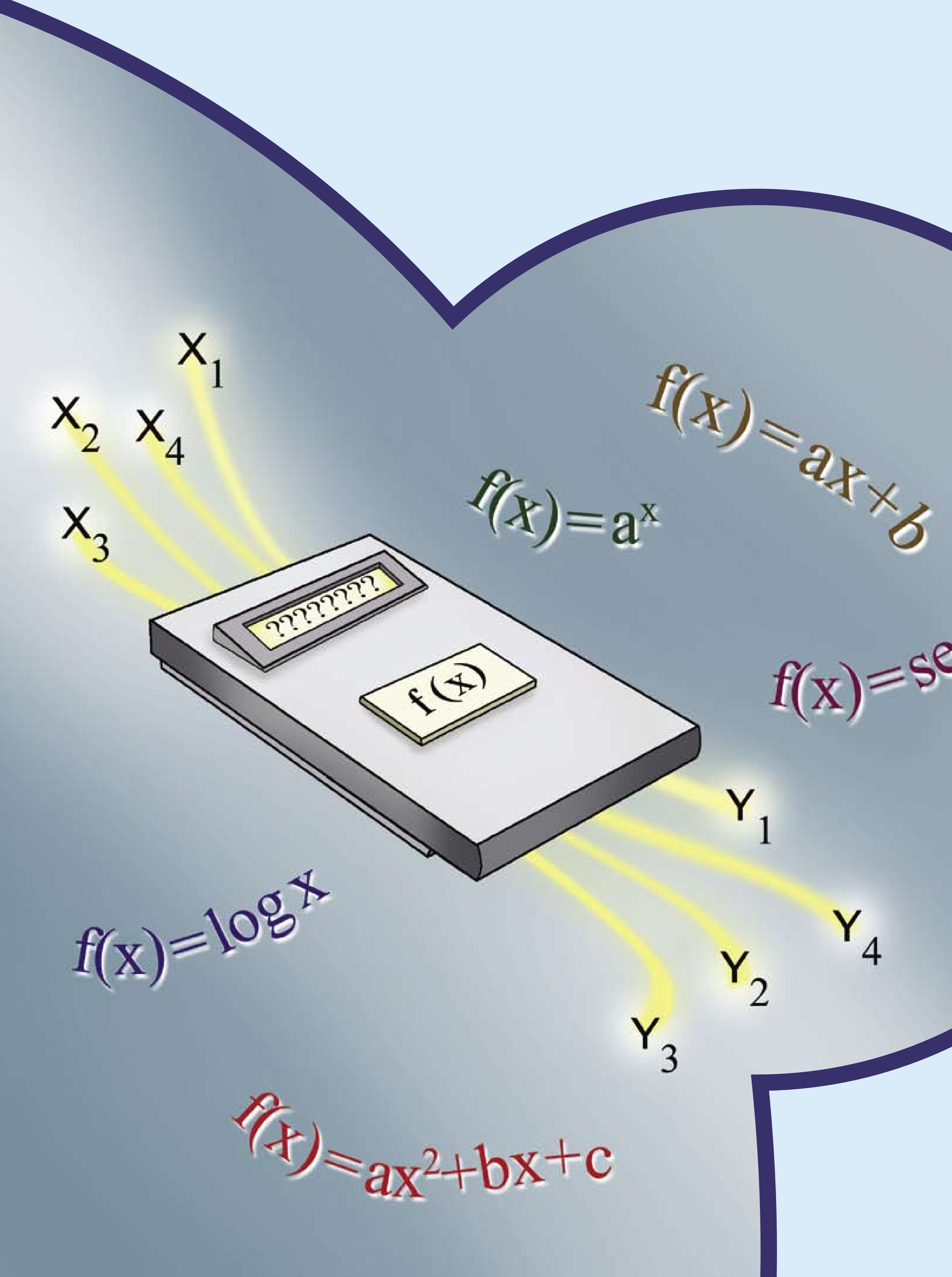
SILVA, L. C. M. **Sala de física**. Disponível em: <http://geocities.yahoo.com.br>. Acesso em: 12 out. 2005.

TRIGONOMETRIA: ontem e hoje. **A Trigonometria e os problemas da latitude e longitude**. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br> . Acesso em: 16 ago. 2005.

ZÊNITE. **Como medir distâncias no espaço**. Disponível em: <http://www.zenite.nu>. Acesso em: 20 ago. 2005.

WIKIPÉDIA. **Inquisição**. Disponível em: http://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 15 mai. 2006.

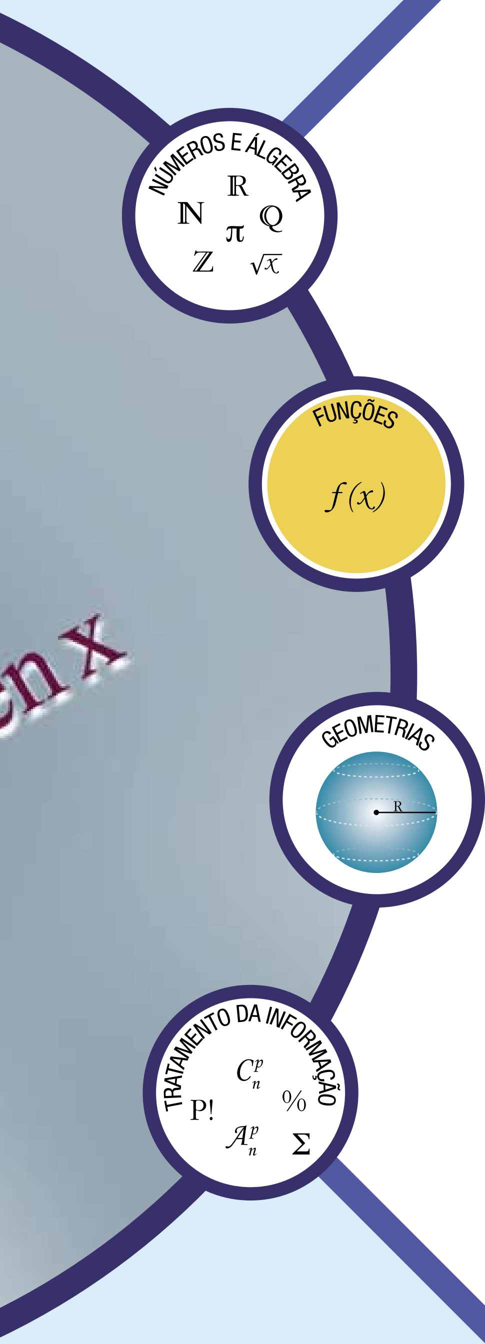
ANOTAÇÕES



x_1
x_2
x_4
x_3
??????????
f(x)
$f(x)=a^x$
$f(x)=ax+b$
Y_1
Y_4
Y_2
Y_3
$f(x)=\log x$
$f(x)=ax^2+bx+c$

RODANDO A RODA

Neusa Idick Scherpinski Mucelin[1]



Dizem que a roda foi a maior invenção do homem antes da escrita. Desde tempos remotos até os dias de hoje ela continua fazendo parte do nosso cotidiano.

O movimento giratório tornou-se fundamental para o homem se locomover e transportar coisas. Do carro de boi até o mais moderno avião, a roda está sempre presente ajudando a colocar a vida em movimento.

A roda passou a ser parte integrante de muitas máquinas que auxiliam a vida funcional do homem, como: levantar pesos, fabricar tecidos, entre outras. Algumas fontes de energia que o homem utiliza estão de alguma forma, associadas à roda, por exemplo, a água.

O movimento de uma roda, além de muito útil para o nosso dia a dia, também pode ser muito divertido. Quem nunca ficou encantado num passeio de roda gigante? Você já andou numa roda gigante? Imagine que você está dentro de uma nesse momento. E que ela vai girar pelo menos dez vezes. Você imagina que vai passar pelo ponto mais alto, e pelo mais baixo, pelo menos quantas vezes?

Como é o movimento da roda gigante? Você consegue descrever o movimento da roda gigante em função do número de voltas na forma de um gráfico?

E como varia a distância, em relação ao solo, de um passageiro durante um passeio de roda gigante?

[1]Colégio Estadual João Manoel Mondrone - EFM - Medianeira - PR

Situações que apresentam movimentos periódicos, oscilatórios ou vibratórios são descritas por funções trigonométricas. A importância do estudo das funções trigonométricas se deve ao enorme campo de aplicações na Matemática, Física, Biologia e Química.

A trigonometria surgiu há mais de dois mil anos. Tratava inicialmente de resolver problemas relacionados à astronomia, como, por exemplo, o cálculo de distância entre planetas e determinação de distâncias inacessíveis, ou seja, calcular distâncias que não podem ser medidas de modo convencional. A base teórica na qual se fundamentou originalmente a trigonometria foi a semelhança de triângulos.

O astrônomo Hiparco (180-125 a.C.) fez contribuições importantes para ciência desenvolvendo os conceitos de trigonometria. Utilizando os conhecimentos obtidos por astrônomos mais antigos, desenvolveu a base da trigonometria (SEDGWICK & TYLER, 1952).

Esta trigonometria evoluiu e tornou-se um conteúdo independente da astronomia com o surgimento do Cálculo Infinitesimal e da Análise Matemática, dando uma nova dimensão às noções básicas da Trigonometria.

Nesta nova abordagem é necessário falar das funções cosseno e seno definidas para todo número real. Ou seja, é necessário tratar seno e cosseno como números.

Mas por que tratar a função como uma variável real e não mais como ângulo?

Como é possível fazer isso?

Uma das maneiras foi sugerida por Leonhard Euler (1707 – 1783). Ele atribuiu a medida de um radiano ao ângulo central de um círculo cuja medida do arco correspondente é a mesma do raio deste círculo. Isso possibilitou encontrar seno e cosseno de ângulos como função de uma variável real, já que agora eram representados por números reais, abrindo assim as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas (NILCE, 2003).

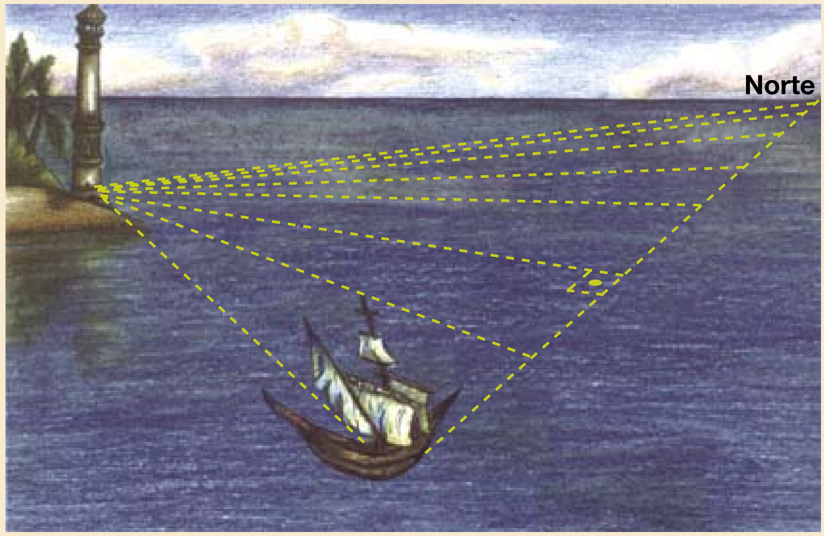
ATIVIDADE

Suponha que você é comandante de um navio em alto mar. De repente avista um farol em uma ilha. Considere que o navio navega sempre na direção Norte.

Como calcular a distância do navio até a ilha?

Como calcular a distância do navio até a ilha supondo que o ângulo formado pela linha imaginária que une o navio ao farol com a direção do navio (Norte) seja 60º?

E se fosse 75º? Ou quem sabe 103º ou 150º?



Desenho: Patrícia Carla Mucelin

Complete a tabela, utilizando a calculadora para auxiliar.

Ângulo	30º	45º	60º	75º	90º	105º	120º	135º	150º	165º	179º
Seno do ângulo											

Conforme o navio se distancia do farol, a medida do ângulo fica cada vez mais próxima de 180°. Neste caso, dizemos que o limite é 180º, pois o navio se desloca sempre na direção Norte.

O que está ocorrendo com os valores do seno dos ângulos?

Por que o seno do ângulo de 120º é igual a 60º?

Olhando para a tabela, você pode me dizer que tipo de variação esta ocorrendo?

O que ocorre com o valor do seno quando o ângulo vai se aproximando de 180º?

Mas você percebeu que há uma variação bem grande de situações envolvendo triângulos?

Você saberia dar alguns exemplos?

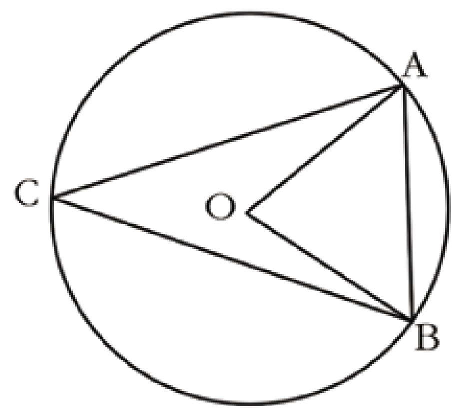
Para generalizar estas relações envolvendo triângulos é que colocamos os triângulos dentro de uma circunferência.

Mas por que colocar os triângulos dentro de uma circunferência?

Os gregos pensaram que a Terra era o centro do universo, como registrado por Eudoxus (408-335 a.C). As estrelas foram firmadas a uma imensa esfera cristalina, a qual os gregos consideravam ser a forma perfeita: o Sol, a Lua, e os cinco planetas visíveis também eram presos a esfera. Ou seja, todos os corpos celestes formavam grandes círculos ao redor da Terra.

Hiparco (180-125 a.C) era um dos astrônomos da antiguidade; trabalhou com triângulos que foram inscritos em círculos. Como ele estava lidando freqüentemente com triângulos na esfera divina, foi chamado “o pai da trigonometria”.

Um problema básico era avaliar os três ângulos e três lados do triângulo inscrito. O problema era: dado um ângulo central AOB, ache o comprimento da corda AB.



Hiparco construiu tabelas de cordas que relacionava as medidas dos lados de um triângulo com a corda de um ângulo. Estas tabelas eram elaboradas a fim de facilitar o cálculo de problemas reais daquela época, como a distância entre pontos inacessíveis na astronomia.

As tabelas de cordas evoluíram para o formato atual, que indica a relação entre o seno de um ângulo agudo e a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo. Ou seja, para um ângulo agudo de um triângulo retângulo, o seno deste ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto pela medida da hipotenusa, conceito desenvolvido por Rheticus (1514-1574) (CROSSFIELD et al., 2004).

Historicamente, o seno e o cosseno foram introduzidos como razões entre lados de um triângulo retângulo. Entretanto, de um ponto de vista funcional moderno, é mais natural considerar as funções seno e cosseno como as funções definidas no círculo unitário (WU-YI HSIANG, 1993).

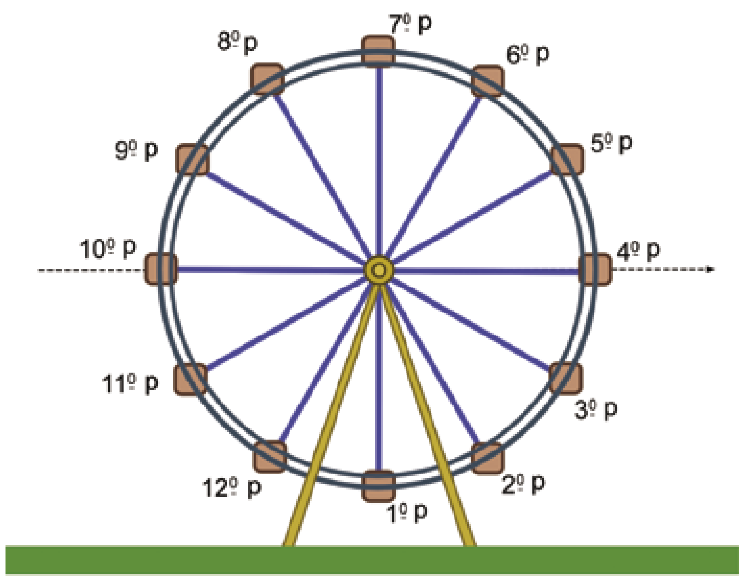
PESQUISA

Mas você sabe o que é um ciclo trigonométrico?

Que tal estudar um pouco a respeito e discutirmos na próxima aula...

Uma aplicação interessante de função trigonométrica é o passeio numa roda gigante. O movimento da roda gigante é periódico e possibilita aos passageiros uma vista espetacular quando atinge o ponto mais alto.

Vamos supor que a roda possui 12 cadeiras igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro, que o raio seja igual a 10 metros e o ponto mais baixo da roda esteja a meio metro do solo. Devemos considerar que a roda leva aproximadamente 36 segundos para efetuar uma volta completa em velocidade constante. Veja a figura a seguir.



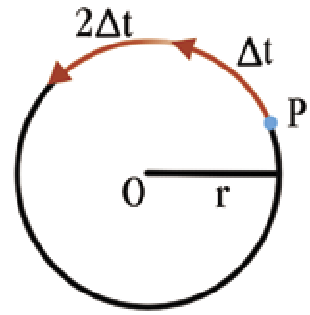
Através da figura acima que representa uma roda gigante com suas cadeiras, podemos explorar duas situações de aprendizagem: a) uma, é abordar possíveis velocidades que esta roda gigante pode adquirir quando se encontra realizando movimento circular uniforme, e b) a outra é explorar os movimentos da roda gigante e encontrar a variação do espaço da posição que a pessoa ocupa durante a trajetória circular desenvolvida pela roda gigante em relação ao solo.

Vamos ao trabalho!!! Qual é a característica do movimento da roda gigante?

Esse movimento é denominado movimento circular uniforme.

Vamos conhecer o movimento circular uniforme?

É um movimento que percorre uma circunferência com velocidade escalar constante. Para que possamos entender, tomamos como exemplo o ponto material P que se desloca sobre a circunferência de raio *r*. Depois de um intervalo T, passa novamente por P, o que se repete nos tempos 2T, 3T, 4T, etc.



Quando o ponto material passar por P, num determinado intervalo de tempo T, realizou uma volta completa. Nesse caso, caracterizou o que chamamos de período. Outro elemento importante do movimento circular uniforme é a freqüência.

Entendendo melhor o que é freqüência

Vamos considerar que o período seja igual a um quarto de segundo. Após o tempo de 1 s, o ponto material terá passado quatro vezes pela posição P. Para essa situação, dizemos que a freqüência do movimento realizado pelo ponto material é de quatro rotações por segundo. Se o período for de 1 s, como resultado, teremos a freqüência de uma rotação por segundo. Se o período for de 3 s, a freqüência encontrada será um terço de rotação por segundo. Esse resultado se deve pelo fato de que, em 1 s, o ponto conseguirá percorrer exatamente um terço da volta completa.

Assim, indicamos o cálculo da **freqüência (f)** pelo cálculo Inverso do período (T) representado na fórmula abaixo. Por essa fórmula, exprimimos que a freqüência é conceituada como "o número de rotações que o ponto material realiza numa unidade de tempo" (AMALDI, 1992, p. 57).

$$f = \frac{1}{T}$$

Sendo a unidade de medida de tempo o segundo, medimos a freqüência em hertz. O hertz, que se indica por *Hz*, é a unidade de medida considerada pelo Sistema Internacional e corresponde a uma rotação por segundo (rps), ou seja, é a freqüência de um movimento circular que tem período de 1 s.

Assim, ao se conhecer a freqüência, podemos determinar o período pela fórmula:

$$T = \frac{1}{f}$$

Para entender melhor, podemos exemplificar com uma situação: quando um movimento circular uniforme tem freqüência de 100 Hz, estamos dizendo que seu período é igual a um centésimo de segundo.

No movimento circular uniforme, temos a velocidade escalar. Esta velocidade permanece constante. Ela é obtida quando dividimos o comprimento de qualquer medida delimitada por um arco da circunferência pelo tempo gasto por um ponto para percorrê-lo. Sabemos que o comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$, onde r é o raio. O ponto material percorre esse comprimento num dado intervalo de tempo que corresponde ao período. Assim, a velocidade escalar v é: $v = \frac{2\pi r}{T}$. Essa é a mesma fórmula que corresponde, no movimento retilíneo, à fórmula $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ou seja, variação do espaço dividido por variação do tempo. Essa fórmula possibilita calcular a velocidade escalar quando conhecemos o período e o raio.

ATIVIDADE

Vamos calcular a velocidade da roda durante o seu movimento. Como já dissemos, partimos de uma situação hipotética em que o raio da roda é igual a 10 metros e a roda leva 36 segundos para efetuar uma volta completa em velocidade constante. Portanto, use a fórmula $v = \frac{2\pi r}{T}$ e calcule a velocidade para as possíveis medidas de raio e período expressas na tabela abaixo:

r	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
v											

Lembre-se de que, nesse caso, a velocidade é medida em m/s (metros por segundos).

PESQUISA

Até que velocidade em m/s o ser humano suporta de forma que ele desça da roda gigante sem a sensação de tontura?

Agora, passaremos a explorar os movimentos da roda gigante e encontrar a variação do espaço que a pessoa pode se encontrar em relação ao solo.

Como varia a distância, em relação ao solo, de um passageiro durante o tempo do passeio?

No desenho da página 123, fica claro que, na posição nº 1, o passageiro está 0,5 m do solo. Como encontrar a altura da cadeira na posição 5?

ATIVIDADE

Complete a tabela que relaciona a variação da distância da posição que se encontra o passageiro do solo em função do tempo. Considere que a roda gira no sentido anti-horário.

Tempo	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
Distância do solo	0,5			10,5			20,5			10,5			0,5

Como calcular as distâncias nas posições intermediárias?

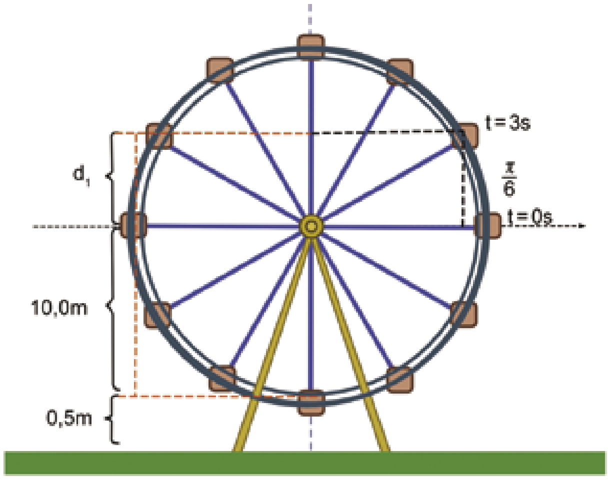
Agora represente num plano cartesiano os pontos da tabela anterior.

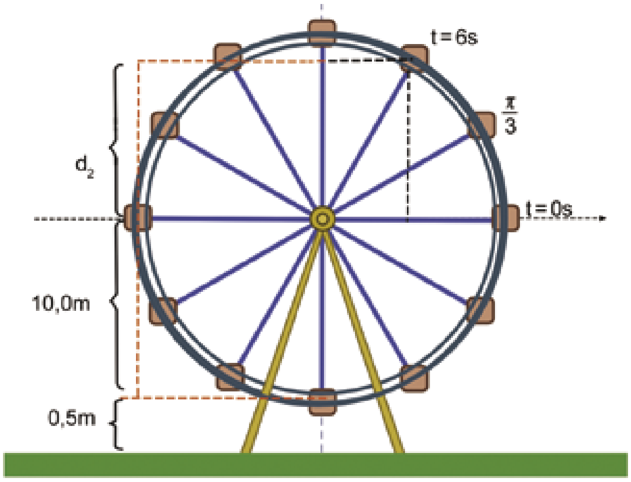
Que tipo de **variação** ocorre com a **distância** em **função** do **tempo**?

Observe que o gráfico tem a forma de uma senóide (função seno). Como determinar a distância que o passageiro está do solo no tempo igual a 1 segundo? E no tempo em 11 segundos de passeio? E em cada instante t do passeio?

Portanto, o movimento da roda gigante é periódico. Determinada a lei desta função trigonométrica, poderemos então calcular a que distância o passageiro está do solo para qualquer posição durante o passeio. Mas como fazer isso?

A roda gigante apresenta forma semelhante ao do ciclo trigonométrico. Para simplificar os cálculos, considere o ponto inicial $t = 0$ s quando o passageiro se encontrar na posição 4 e, portanto, estará a 10,5 m de distância do solo. No tempo $t = 3$ s a distância do passageiro ao solo será 10,5 m mais d_1. Veja as figuras:





Para t = 3, temos a distância do solo = $0{,}5 + 10 + d_1$, isso significa que:

$sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{d_1}{10}$ assim $d_1 = 10 \,.\, sen\,\frac{\pi}{6}$,

então a distância do solo = $0{,}5 + 10 + 10 \,.\, sen\,\frac{\pi}{6}$.

Para t = 9, temos a distância do solo = $0{,}5 + 10 + d_2$,

isso significa que: $sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{d_2}{10}$ assim $d_2 = 10 \,.\, sen\,\frac{\pi}{3}$,

então a distância do solo = $0{,}5 + 10 + 10 \,.\, sen\,\frac{\pi}{3}$

e dessa forma sucessivamente para os demais arcos.

Então, como pode ser expressa a lei da função?

ATIVIDADE

Observe que à distância do passageiro ao solo dependerá da amplitude do arco que ele já descreveu. Como a medida do arco é dado em radiano, é necessário fazer uma relação entre a amplitude dos arcos com os tempos de movimento da roda. Uma adaptação é necessária para obtermos o tempo em função do arco. Complete a tabela a seguir:

Arco	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π
Tempo	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
Distância do solo	0,5			10,5			20,5			10,5			0,5

Já descobriu qual é a relação do arco em função do tempo?

Se uma volta na roda gigante leva 36 s e corresponde a 2π *rad*, então 1 s corresponde a um arco de quantos radianos?

Então, qual é a função da distância a que se encontra um passageiro do solo, durante o tempo do passeio?

Levando em consideração que a volta começa na cadeira nº 1 e em relação à cadeira nº 4 está $\frac{\pi}{2}$ *rad* abaixo, como fica a expressão matemática para esta função subtraindo este valor do arco?

E, desse modo, determinamos uma expressão que permite calcular a distância do solo (em metros) a que se encontra um determinado passageiro em cada instante t do passeio. Agora determine a distância que o passageiro está do solo no tempo igual a 1 segundo e no tempo em 11 segundos de passeio.

Se a roda gigante apresenta um período de 36 segundos (tempo de uma volta), quantas voltas completas um passageiro dá em um passeio de 3 minutos?

Qual é a distância percorrida para este passeio?

Qual é a velocidade (supondo que ela é constante)?

Faça um gráfico para representar a distância do solo (em metros) a que se encontra um determinado passageiro neste passeio de 3 minutos.

Qual é o período desta função?

Qual é a imagem? E o domínio?

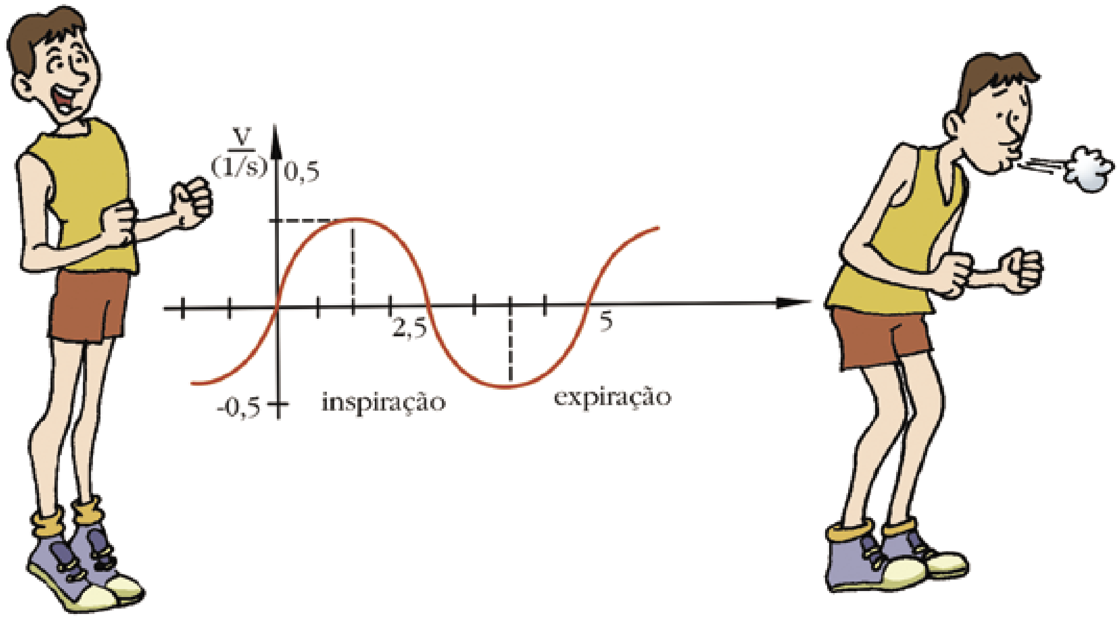
ATIVIDADE

Um bilhete dá direito a 5 minutos de viagem na roda gigante, o passeio inicia quando o passageiro entra na roda gigante, ocupando a cadeira que está na posição 1, ou seja, distante 0,5 m do solo. Considere que a primeira e a última volta tem duração de 1 minuto cada - para que os passageiros possam entrar e sair da roda gigante; já as demais voltas têm duração de 30 segundos cada. O raio é de 10 m e as cadeiras estão à mesma distância entre si.

Determine a altura em função do tempo durante o passeio e represente graficamente.

Uma outra aplicação de função trigonométrica ocorre no nosso sistema respiratório, pois a nossa respiração é cíclica, com períodos alternados de expiração e inspiração. Um ciclo respiratório completo dura cerca de 5 segundos, numa pessoa adulta em condições normais.

Profissionais da área de saúde mediram a velocidade do fluxo de ar dentro dos pulmões a cada instante e obtiveram uma curva aproximadamente senoidal. O gráfico seguinte expressa a velocidade do ar, em litros/seg, em função do tempo em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração. A velocidade é considerada positiva nos momentos em que o ar entra nos pulmões, e é considerada negativa quando o ar sair dos pulmões.



ATIVIDADE

Quais são os pontos de velocidade máxima e mínima do ciclo respiratório e a amplitude da velocidade?

Qual é a expressão matemática que representa a lei desta função?

Vamos aprender um pouco mais sobre a nossa respiração? Você sabia que a nossa respiração consiste no intercâmbio de gases entre e organismo e o meio externo? As trocas entre o ar pulmonar e o sangue, pelas quais perde dióxido carbônico (CO_2), e ganha oxigênio (O_2), constituem a respiração externa ou respiração pulmonar, enquanto que as trocas em níveis celulares, ou seja, entre o sangue e os tecidos, formam a respiração interna ou respiração celular (TUBINO, 1984).

A trigonometria que teve sua origem na Agrimensura e Astronomia transformou-se numa parte importante da Análise Matemática, auxiliando o estudo físico do movimento periódico e a transmissão do calor. Também é utilizada para expressar relações entre números complexos sem necessidade de recorrer a arcos e ângulos. Mas esta é uma outra história, a história dos números complexos!

Referências Bibliográficas

AMALDI, U. **Imagens da física**: as idéias e as experiências do pêndulo aos quarks. Tradução: TROTTA, F. São Paulo: Scipione, 1992.

ÁVILA, G. **A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga**. Revista do professor de matemática, nº 1, p. 9-13, 1982.

CROSSFIELD, D.; STEIN, R.; SHEPERD, C.; WILLIAMS, G. **Historical Modules Project**: Trigonometry. Washington- DC: MAA, 2004. 191 p.

NILCE M. L. C. **A História da Trigonometria**. Revista Educação Matemática, n. 13., 2003.

SEDGWICK, W. T.; TYLER, H. P. **História da ciência**: desde a remota antiguidade até o alvorecer do século XX. Tradução: Leonel Vallandro. 2ª ed. Porto Alegre: Globo, 1952. 436 p.

TUBINO, M. J. G. **Metodologia científica do treinamento desportivo**. 3ª ed. São Paulo: Ibrasa, 1984.

Obras Consultadas

CARNEIRO, V. C. **Funções elementares**: 100 situações-problema de matemática. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1993, 134 p.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria números complexos**. Coleção do Professor de Matemática, 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 1993, 121 p.

GIMÉNEZ, C. C. ; PIQUET, J. D. **Funciones y gráficas**. Madri: Síntesis, 1990. 176p.

HOGBEN, L. **O homem e a ciência**: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. Porto Alegre: Globo, v.1, 1952. 606 p.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**: influência e função matemática nos conhecimentos humanos. Tradução: Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer. 2ª ed. Porto Alegre: Globo, 1970. 762 p.

HSIANG, W. **Funções trigonométicas e leis da trigonometria**. Revista do professor de matemática, nº 23, p. 23-34, 1993.

KENNEDY, E. S. **TRIGONOMETRIA**: tópicos de historia da matemática para uso em sala de aula. v. 5, Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. 48 p.

MATOS, J. M.; CARREIRA, S.; SANTOS, M.; AMORIN, I. **Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática**. Lisboa: MEN, 1994.

TIPLER, P. A. **Física**. v. 2, Rio de Janeiro: Guanabara, 1984. 587 p.

Documentos Consultados *ONLINE*

BEBER, D.C. **Projeto Trigonometria!** Disponível em: http://www.ceap.g12.br. Acesso em: 20 ago. 2005.

FERRAZ NETTO, L. **Feiras de ciência**. Disponível em: http://www.feiradeciencias.com.br.> Acesso em: 15 set. 2005.

LIMA, E. L. **Matemática do ensino médio**. Disponível em: http://www.ensinomedio.impa.br> Acesso em: 10 ago. 2005.

MARQUES, P. **Teorema dos senos - TS**. Disponível em: http://www.terra.com.br> Acesso em: 16 ago. 2005.

MATEMÁTICA ESSENCIAL. **Trigonometria: Seno, Cosseno e Tangente**. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br> Acesso em: 20 ago. 2005.

OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br> Acesso em: 12 ago. 2005.

PHILIPS J. **Eratóstenes**. Disponível em: http://geodesia.ufsc.br/wikidesia. Acesso em: 17 out. 2005.

SILVA, L. C. M. **Sala de física**. Disponível em: http://geocities.yahoo.com.br> Acesso em: 12 out. 2005.

WIKIPEDIA: Disponível em: http://pt.wikipedia.org> Acesso em: 14 out. 2005.

ANOTAÇÕES

I n t r o d u ç ã o

Geometrias

Desde a infância nos deparamos com situações que lembram noções de espaço e formas dos objetos. Desta maneira, vamos adquirindo conhecimentos sobre Geometria. A Geometria é a ciência que tem por objetivo analisar, organizar e sistematizar o conhecimento espacial. As representações geométricas estão a nossa volta em forma de gráficos, figuras planas e espaciais.

O ensino de geometria deve se ater para questões que expressem o pensamento geométrico, ou seja, o ensino precisa permitir que você, estudante, realize uma leitura que exija a percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica, fatores estes que influenciam diretamente na relação que envolve a construção e apropriação de conceitos abstratos e aqueles que se referem ao objeto geométrico em si.

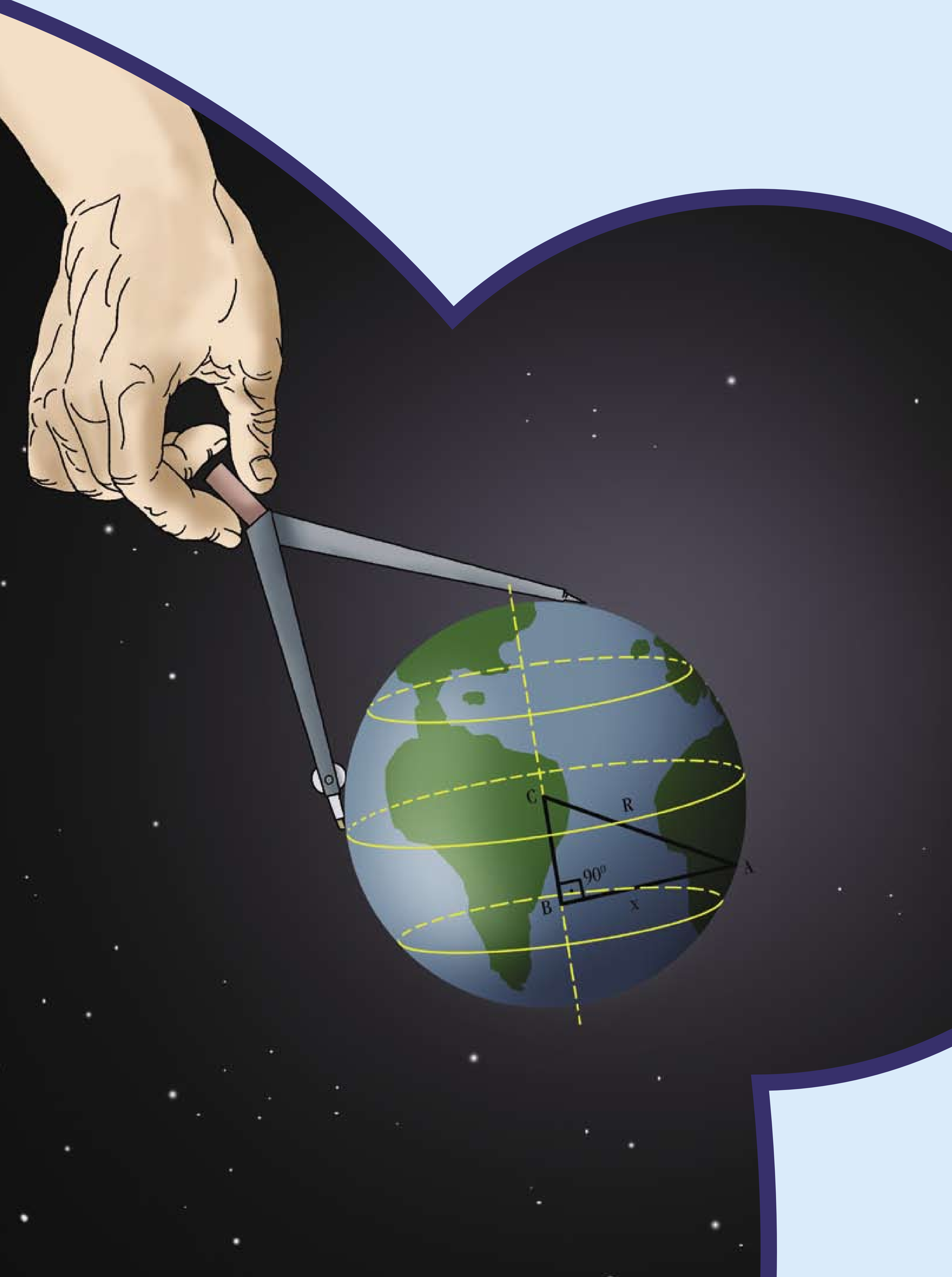
Nos Folhas que compõem este capítulo, buscamos maneiras pelas quais você, aluno, possa vivenciar um aprendizado de Geometria com um novo significado, ou seja, apropriar-se do conhecimento geométrico por meio de um processo de aprendizagem investigativo. Portanto, veja cada produção com um olhar de curiosidade, busque novas perspectivas, pesquise! Não aceite como verdade o que lhe propomos, queremos aguçar-lhe a curiosidade. São produções que lhe convidam a pensar sobre as possibilidades de aprender. Não existem todas as respostas, nem todos os caminhos... você terá a oportunidade de descobrir, por meio do seu espírito inventivo e criativo, as possíveis respostas.

Você já se questionou sobre as mudanças no espaço geográfico, suas formas, sua beleza e sua organização? Percebe a geometria presente em nosso dia a dia? Este é o assunto abordado no Folhas **A beleza das formas**.

M A T E M Á T I C A

A Trigonometria, quando limitada ao contexto matemático, poderá expressar tão somente mais um dos conteúdos ensinados em nossas escolas. Entretanto, tecida com fios de outras áreas de conhecimento, poderá se constituir em um dos mais fascinantes capítulos da História da Matemática. E este foi o contexto escolhido para se explorar o Teorema de Tales. Este tema é abordado no Folhas **Se ficar, o cupim come... se tirar, a casa cai?**

No Folhas **Qual Matemática está presente no resgate do barco?**, discutimos como conceitos de geometria analítica articulados com conceitos de Física podem contribuir para localizar objetos no espaço plano. Realiza relação interdisciplinar, também, com Educação Física, ao chamar o centro da circunferência como o centro de equilíbrio da mesma e, por conseguinte, essa afirmação levanta um ótimo questionamento sobre sua validade em outras circunferências. Ainda, com a Disciplina Educação Física, explora o conceito de centro de gravidade corporal e suas interferências nas atividades corporais que executamos, quer seja nas atividade do cotidiano ou nas atividades esportivas.


C
R
90°
A
B
x

11

A BELEZA DAS FORMAS

Daisy Maria Rodrigues[1]

Observe as imagens e discuta as questões a seguir:

Pablo Picasso. O poeta (1910), 1,30 m x 89 cm. Museu Goggenheim, Veneza.

Sandro Botticelli. Nascimento de Vênus, 1484. Galeria Uffizi, Florença, Itália. 172,5x278,5cm. Têmpera sobre tela.

O que é belo? Quem determina os padrões de beleza? A beleza existe ou está nos olhos de quem vê?

[1]Colégio Estadual Antonio Martins de Mello – EFM - Ibaiti - PR

Podemos observar a natureza e perceber uma infinidade de padrões que podem nos servir como elementos de referência e inspiração para a criação de novos padrões. Por exemplo: os babilônios observavam os fenômenos da natureza e eram capazes de registrar suas observações sobre a movimentação das estrelas, de modo que puderam estabelecer técnicas de plantio, que decorreram destas observações.

Os gregos deram contribuições para a geometria e a astronomia, estabelecendo relações entre ângulos, triângulos e círculos, propondo que a Terra não era achatada e sim esférica. Hoje se sabe que a Terra tem um formato chamado de geóide, sendo levemente achatada nos pólos. Há uma grande variedade de "formas" que podem ser encontradas na natureza. Um exemplo notável é a teia de aranha, utilizada como meio de ataque e defesa.

Os formatos das teias são determinados pela herança genética, sendo a mais comum a espiral.

Você sabe como a aranha constrói sua teia?

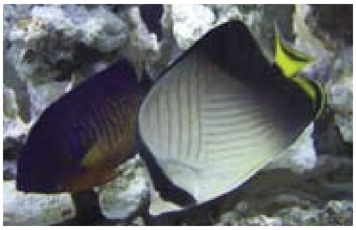
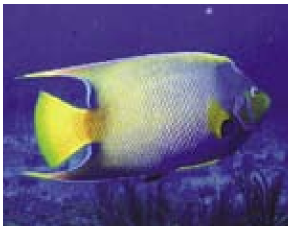
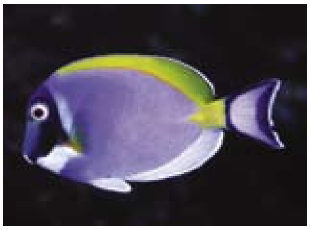
A construção começa com uma moldura. Nela são presos os fios que se cruzam no centro. Sobre esses fios, que são a base desta construção, é traçada uma espiral provisória de dentro para fora, em seguida, substituída por uma espiral viscosa, de fora para dentro.

PESQUISA

Observando a natureza conseguimos identificar formas geométricas?

O avanço das tecnologias em várias áreas do conhecimento potencializou ao homem observar o belo em outras perspectivas.

Existem algumas formas na natureza que chamam mais a atenção do homem. Podemos encontrar formas que sugerem as geométricas. Mesmo não sendo muitas vezes exatas, podemos reconhecer a similaridade de formas como a triangular, a arredondada e a quadrangular. Elas podem ser observadas em alguns peixes de aquários, como mostra a imagem a seguir (GERDES, 1992).

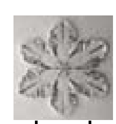

Fotos: http://www.sxc.hu

Já a figura hexagonal é encontrada na superfície de muitos tecidos celulares, como nos olhos da mosca ou na colônia de madrepérola, em formato de rede.

ATIVIDADE

Os flocos de neve descrevem um padrão geométrico. No desenho encontra-se uma dessas representações. Aborde as regularidades existentes nesse padrão.

O cristal de gelo pode chegar, às vezes, a 5mm ou mais em diâmetro, em condições normais, os tamanhos variam de acordo com a temperatura.



0,5 mm

2 a 4 mm de diâmetro

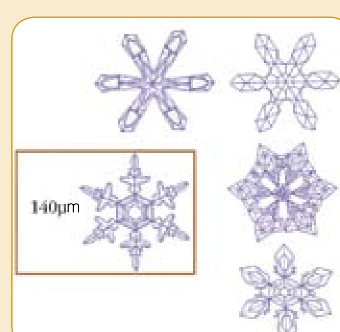
ATIVIDADE

Você se lembra o que é mícron?

O mícron (μm) ou micrômetro, é uma unidade de comprimento que corresponde à milésima parte do milímetro: $1\ \mu m = 10^{-6}\ m = 10^{-3}\ mm$

Se o cristal em evidência possui um diâmetro de 140 μm, então qual o tamanho em mm? Represente esse valor em números decimais.

No acervo do Ukichiro Nakaya Museu de Neve e Gelo, existem imagens de flocos de neve (cristais de neve) de forma hexagonal, mas podendo apresentar outras formas. Vale a pena conferir! Você vai achar muita coisa interessante, visite o site: *http://www.its.caltech.edu/~ph76a/japantour/part1/japantour.htm*



Formas na natureza

Fotos: http://www.sxc.hu

Quando se estuda a organização dos "seres vivos", em algumas áreas da Biologia, como a botânica e a zoologia, percebe-se que é comum a forma pentagonal. Um exemplo é a Estrela do Mar da classe *Asteroidea* que possui 5 braços ao redor de um disco central.

Nas flores, por exemplo, observa-se que o número de pétalas, na maioria das vezes, corresponde a um dos termos da seqüência de Fibonacci que é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...; no entanto, o lírio apresenta 6 pétalas sendo uma exceção à regra. Por outro lado, a Fúcsia que apresenta 4 pétalas e o famoso Trevo da Sorte que tem 4 folhas, podem ser inseridos em outra seqüência, a de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11,...

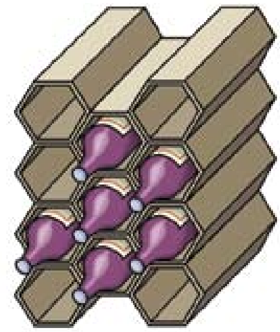
François Edouard Anatole Lucas (1842-1891), matemático francês, conhecido pelos seus resultados na Teoria dos Números, em particular estudou a sucessão de Fibonacci e a associada sucessão de Lucas, assim nomeada em sua honra. Lucas também criou métodos para testar a primalidade de números.

Embora o número de Fibonacci apareça em muitas situações na natureza, não se pode afirmar que isso seja uma lei universal, pois podem aparecer seqüências anômalas, que em uma análise biológica seria, apenas diversidade. Isso configura uma fascinante tendência predominante.

Flor de laranjeira, Lírio, Fúcsia, Trevo

Ao observar e estudar as formas encontradas na natureza, o homem tem aprendido muitas coisas. Ele percebeu padrões e regularidades com as abelhas, por exemplo, e compreendeu que o formato dos favos de mel é muito bom para guardar objetos com grande aproveitamento de espaço.

Exemplos da aplicação do formato das colméias são os suportes de garrafas para o armazenamento de bebidas em adegas. A mesma forma hexagonal é encontrada na cabeça de um tipo de parafuso chamado sextavado.



PESQUISA

Consegue averiguar onde e por que é utilizado este tipo de parafuso?

Por que a cabeça dos parafusos são sempre em forma de polígonos regulares?

Para apertar ou desapertar parafusos, quanto seria preciso girar a chave se sua cabeça fosse triangular? E quadrada, ou hexagonal?

Isso vai depender do espaço que o mecânico tem para trabalhar. Em espaços pequenos, a variação de ir e vir da chave terá que ser menor, ou seja, depende do ângulo central de cada polígono.

Se for verdade, então não seria mais fácil um parafuso de forma octogonal? Já viu alguma chave assim?

Ou ainda com o número de lados maior que seis?

Note bem: na natureza nos deparamos com padrões e usamos formas geométricas para descrevê-los. Mas também podemos criar padrões, alguns deles que não possam ser encontrados na natureza (ou que desejamos encontrar, quem sabe ainda não os tenhamos reparado...). Uma das maneiras pelas quais podemos criar padrões utilizando formas geométricas é a construção de mosaicos.

PESQUISA

Mosaico é uma palavra de origem grega que significa paciência. Por que paciência?

O mosaico teve origem em antigas civilizações, como o Egito e a Mesopotâmia. O mais antigo de todos os mosaicos conhecidos pertence ao ano de 3500 a.C., foi descoberto na antiga cidade de Ur. Pode ser visto no Templo di Ur.

Os romanos difundiram a arte do mosaico em todos os confins do Império. Com o crescimento do Cristianismo, novos temas foram introduzidos. Neste contexto o mosaico atingiu sua mais perfeita realização, durante o governo do Imperador Justiniano, que reinou de 527 a 565 (GRAÇA PROENÇA, 1999).

Imperador Justiniano, 526-547. Igreja de São Vitale, Ravenna, Itália. Mosaico.

Esquema dos três círculos

Personalidade

A figura do Imperador Justiniano é um detalhe do mosaico da Igreja de São Vital, onde pode ser observada a "aplicação do esquema de três círculos", que consiste em 3 círculos concêntricos: o primeiro de raio igual ao comprimento do nariz, determinando as faces e a testa; o segundo, com o dobro do raio, determinando o cabelo e o queixo; e o terceiro, com raio igual a três unidades, que passa pela metade do pescoço e forma o halo – como o poder e riqueza expressam autoridade absoluta do imperador, chegou a ser representado desta forma, como a cabeça aureolada (PANOFSKY, 1976).

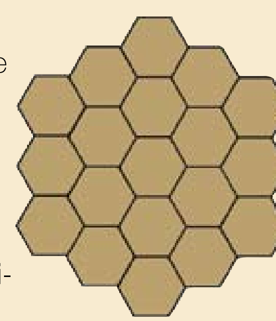
Os mosaicos também estão presentes em obras arquitetônicas, como nas fachadas de edifícios, nas pastilhas decorativas para recobrir paredes. Trabalhos como o do espanhol Antonio Gaudi (1852-1926) ou ainda o mosaico da fachada do Cemitério Municipal de Curitiba.

Foto: Icone Audiovisual

Uma maneira especial de construir mosaico é através do ladrilhamento, a arte de cobrir superfícies com figuras regulares planas sem sobreposição e sem falhas entre elas.

ATIVIDADE

Você pode descobrir como revestir o chão de sua sala brincando com as figuras e desafiar sua criatividade!!! Realize uma experiência:



Exemplo de um revestimento

a) Em uma folha de papel desenhe um polígono regular.
b) Depois desenhe mais alguns idênticos ao primeiro.
c) Recorte todos os polígonos.
d) Encaixe os polígonos.
e) O que se observa em relação ao tipo de polígono escolhido e o encaixe entre eles?
f) Qual é o valor dos ângulos internos desse polígono?
g) É possível realizar o revestimento com dois ou mais tipos de polígonos? Faça uma ilustração.

Recobrir uma superfície plana com peças poligonais constitui uma das atividades mais antigas realizadas pelo homem. Kepler foi o primeiro a estudar pavimentações do plano utilizando polígonos regulares. Em seus estudos, observou que polígonos regulares idênticos pavimentam perfeitamente um plano se somente seus ângulos internos forem um divisor de 360º. As pavimentações formadas apenas por ladrilhos de mesmo formato chamam-se pavimentações monoédricas ou puras. Dentro das pavimentações monoédricas, temos as chamadas pavimentações regulares - aquelas em que o ladrilho é um polígono regular.

Você sabe quais são os polígonos regulares que pavimentam? E quantas existem?

As pavimentações formadas utilizando-se mais de um tipo de polígonos regulares são chamadas pavimentações arquimedianas ou semi-regulares, e ainda de "Molécula de Arquimedes", cujos vértices da pavimentação são todos do mesmo tipo. Por isso, são descritas de acordo com o tipo de vértice. Isto significa que existem pavimentações semi-regulares compostas pelo mesmo tipo de polígonos que não são idênticas (BARBEDO, 2005).

Se unirmos os centros dos hexágonos, verificamos que obtemos uma pavimentação regular triangular e o contrário também se verifica, ou seja, se unirmos os centros dos triângulos, obtemos uma pavimentação regular hexagonal. Assim, cada uma das pavimentações diz-se dual da outra, uma vez que a pavimentação dual é aquela que se obtém unindo os centros dos ladrilhos da pavimentação.

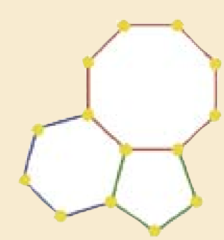
ATIVIDADE

Descubra essas moléculas!

Suponhamos que n, p e q é o número de lados de cada um dos distintos polígonos, como na figura abaixo. Se n = 5, p = 6 e q = 8, pode ser representada por um nome constituído por números inteiros: 5, 6 e 8.

Será que esta figura é uma "molécula de Arquimedes?"

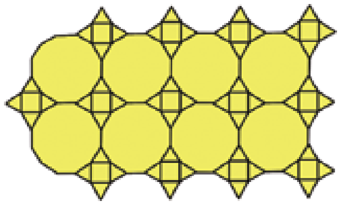
Você pode terminar de completar a tabela?



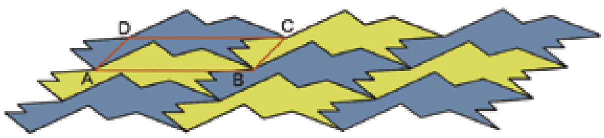
Nº de lados	3		5	6		8		10	11
Ângulo Interno	60	90			128,57		140		

Será que é possível saber para quantas pavimentações semi-regulares existem? Que tipo de pavimentação são as figuras a seguir?

Pavimentações como essas são chamadas de periódicas uma vez que recobrem o plano repetindo um mesmo padrão.



■ Pavimentações figuras regulares



■ Pavimentações periódicas

Roger Penrose, um importante físico-matemático, criou uma curiosa pavimentação aperiódica (não repete padrões), que envolve polígonos batizados de "pipa" e "seta". Este tipo de pavimentação foi usado por uma fábrica de papel higiênico, cujo objetivo era a redução de 15% de papel, no mesmo volume do rolo. O caso foi parar nos tribunais, pelos direitos autorais do desenho.

Será que você consegue averiguar qual foi o desenho utilizado?

Quando estudamos Geometria, pensamos que a seqüência como ela é apresentada sempre foi a mesma e não nos damos conta das transformações das idéias dos grandes homens que a construíram, dos caminhos percorridos, e das circunstâncias em que estes conhecimentos surgiram.

As civilizações antigas que contribuíram com a evolução da Geometria foram: a chinesa, a indiana, a mediterrânea, a da Mesopotâmia, e as do vale do rio Nilo. O desenvolvimento da Geometria se iniciou tomando como base, o conceito de que a terra era plana, mas isto não impediu sua evolução.

As origens da Geometria (do grego: medir *a* terra) parecem surgir das necessidades do dia a dia. Para medir, necessitavam de padrões de medidas, assim foram surgindo: palmo, pé, passo, braça, cúbito, e isto tudo por volta de 3.500 a.C., quando começaram a surgir os primeiros templos, passando a adotar a longitude das partes do corpo de um único homem, geralmente o rei.

Dois papiros são relevantes contendo informações referente à matemática egípcia antiga: o papiro de Moscou (aprox. 1.850 a.C.) e o papiro Rhind ou Ahmes (aprox. 1.659 a.C.), contendo 26 problemas geométricos, entre eles fórmulas de mensuração necessária para cálculo de áreas de terras e volumes de grãos.

PESQUISA

Aceita um desafio? Descubra o que puder sobre os papiros.

Um dos problemas que consta no papiro Rhind é quando se compara a área do círculo e do quadrado circunscrito. Nesse papiro encontrou-se o círculo de diâmetro 9:64 setat, o quadrado de lado 9:81 setat.

1 *setat* é *khet* ao quadrado.

1 Khet = 100 cúbitos. 1 cúbito = 52,36cm

Os problemas clássicos da Geometria grega contribuíram para o desenvolvimento da matemática, tendo em vista limitações técnicas para sua resolução (só se permitia o uso de uma régua sem escalas e um compasso).

- **Duplicação do cubo**: Dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.
- **Trissecção do ângulo**: Dado um ângulo, construir um ângulo com um terço da medida.
- **Quadratura do círculo**: Dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.

Se tentarmos reproduzir a solução destes problemas da mesma forma como está nos papiros, teremos dificuldades na interpretação dos dados. Esta é uma das maneiras de percebemos as transformações para o avanço das ciências que ocorreram no decorrer da história.

Já pensou qual será sua contribuição, o seu legado, para a história da humanidade?

Não há na natureza, nada suficientemente pequeno ou insignificante, que não mereça ser visto pelo olho da geometria: há sim, uma ‘agradável geometria das criações da natureza’. Dificilmente encontraremos algo que não se possa relacionar com a geometria.

Leonardo da Vinci

Por que prender a vida em conceitos e normas?
O Belo o Feio... o Bom e o Mau... Dor e Prazer...
Tudo, afinal, são formas
E não degraus do ser!

Mário Quintana

Referências Bibliográficas

BARBEDO, J. **Uma tarefa de investigação para MATB**: Moléculas de Arquimedes. Disponível em: <http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/activ_judite.pdf,> Acesso em: 12 set. 2005.

SANTOS, M. G. V. P. **História da Arte**. 13ª ed. São Paulo: Ática, 1999.

PANOFSKY, E. **Significado das Artes Visuais**. São Paulo: Perspectiva,1976.

Obras Consultadas

CAVANHA, A. O. **A divina proporção, o número de ouro e a espiral logarítmica no Universo**. Curitiba: Vicentina, 2000.

DOCZI, G. **O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura**. São Paulo: Mercuryo, 1990.

GHYKA, M. C. **Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes**. Buenos Aires: Editorial Poseidon, 1953.

GERDES. P. **Sobre o despertar do pensamento Geométrico**. Curitiba: Editora UFPR, 1992.

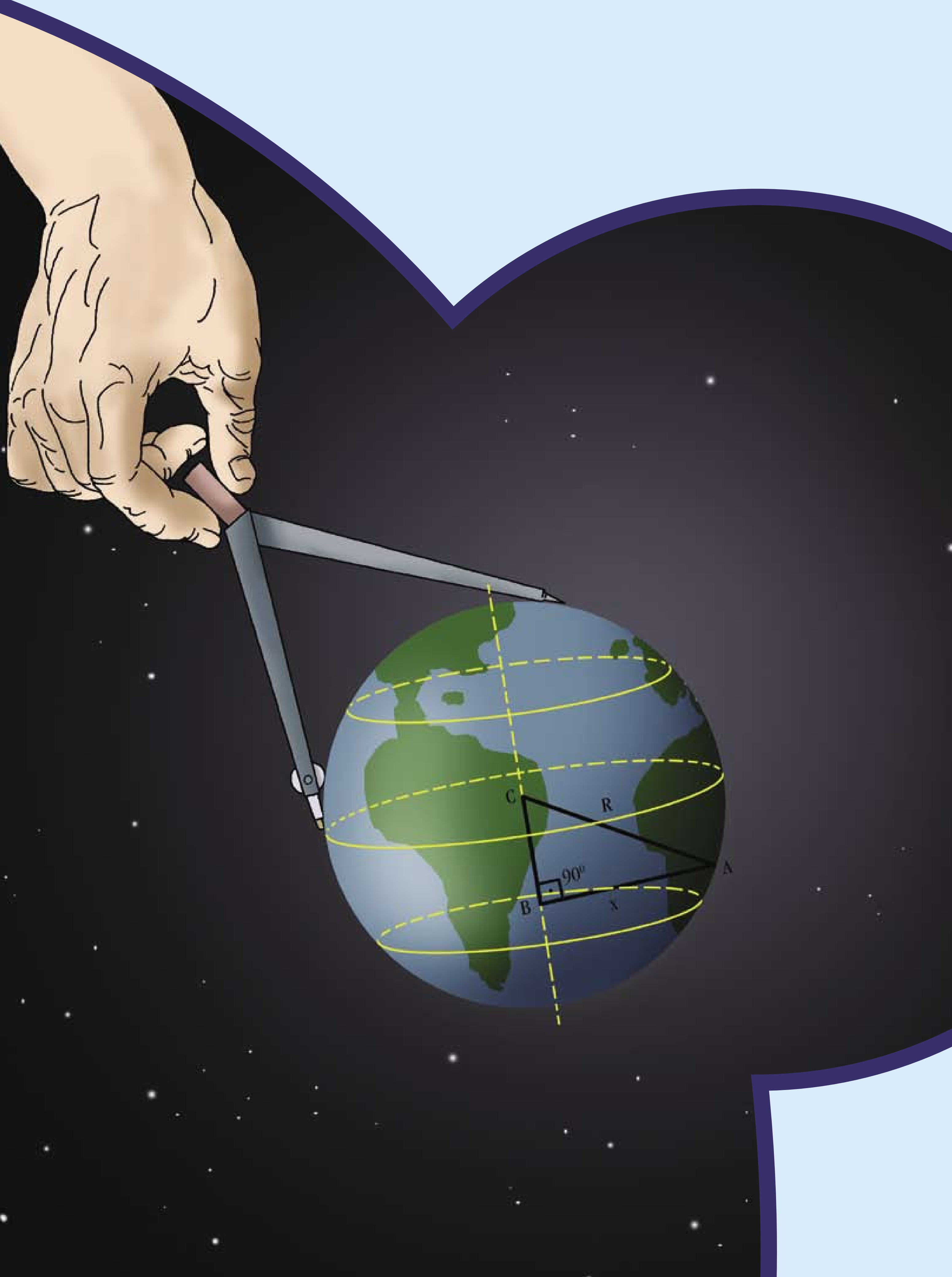
Documentos Consultados *ONLINE*

KNOTT, Dr Ron Knott. **Fibonacci Numbers and Nature**. Disponível em http://www.mcs.surrey.ac.uk>. Acesso em: 17 out. 2005.

MELLO, J. L. P. **Matemática: pavimentações e a matemática do mal**. Folha de São Paulo. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 set. 2005.

Snow Crystal Photographs: The Rasmussen & Libbrecht Collection. Disponível em: http://www.its.caltech.edu>. Acesso em: 22 set. 2005.

ANOTAÇÕES

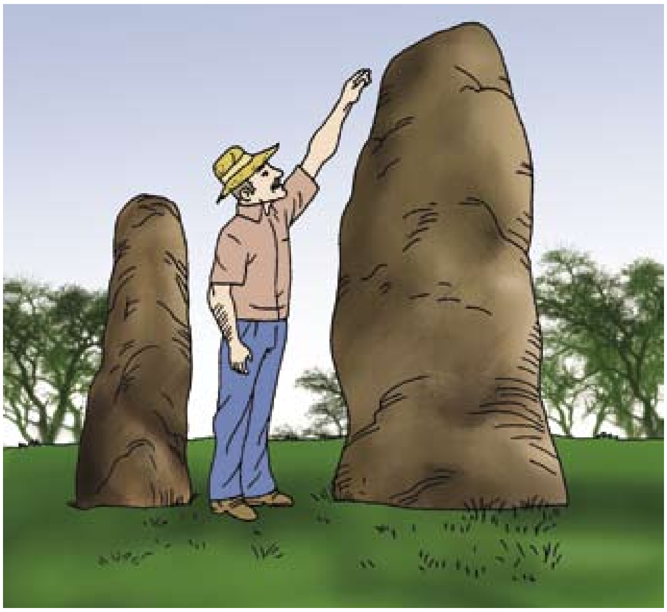

C
R
90°
A
B
x

12

SE FICAR, O CUPIM COME... SE TIRAR, A CASA CAI?

Mírian Longaretti[1]

Um velho pinheiro foi atacado por cupins e será preciso derrubá-lo.
Acontece que a única direção em que se pode derrubar a árvore, existe uma casa, localizada nas suas proximidades, em perigo, pois não se sabe a altura da árvore. Como calcular a altura do pinheiro?



Cupinzeiro

[1]Colégio Estadual Pedro Macedo - EFM - Curitiba - PR

Cupim

Você sabia que a palavra “cupim” é ambígua? Sim, pois designa não só o inseto como também o ninho que o mesmo constrói. É por isso que se diz: “o cupim corrói o madeiramento”; “o cupim enfeia os prados”.

PESQUISA

Antes de continuarmos, é preciso perguntar-lhe: Você tem alguma dúvida quanto ao significado da palavra “ambígua”? E por falar em “ambígua”, que maravilha é o dicionário da Língua Portuguesa, não é mesmo? Consultá-lo, então, é melhor ainda. E sem a intenção de fanatismo, cultivar o hábito de consultar um dicionário é “tri-legal”. A propósito, o que significa, para você, a palavra “léxico”?

Insetos sociais, pois há indivíduos dos dois sexos, os cupins pertencem à ordem *Isópteros*, da família *Termitidae*. Observe: também para estas palavras (*Isópteros*, *Termitidae*), o dicionário é interessante. Afinal, elas podem revelar “segredos” dos cupins. Mas, preste atenção ao que vou lhe contar: existem castas de cupins assexuados. Sabe o porquê? É necessário, pois quem faria determinadas tarefas? Serei mais clara: os cupins assexuados apresentam o organismo adaptado para o trabalho a que são destinados. Assim como alguns seres humanos desenvolvem o seu trabalho profissional em sua própria casa, enquanto outros “trabalham fora”, alguns cupins são adaptados para o trabalho externo e, outros, para o trabalho interno. E mais: há os cupins que cuidam da defesa, são os guerreiros (*nasuti*, na terminologia científica). Espero que você esteja percebendo que, com este palavreado – trabalho externo, trabalho interno, defesa – refiro-me aos “ninhos”. Enquanto na Amazônia, os “ninhos” são denominados “itapecuim” ou “tapecuim”, em Mato Grosso e no Rio Grande do Sul, diz-se “itacuru” ou “tacuru”. Aliás, um “dicionário etimológico” pode contar o porquê destes nomes.

Segundo estudiosos sobre cupins, os ninhos são característicos para cada espécie, sendo que a parte central é feita de madeira mastigada, como se fosse “*papier maché*”. Por falar em *papier maché*, como vai o “seu francês”?

Com certeza, você está sentindo que é muito excitante essa necessidade de se consultar dicionários: da língua portuguesa, etimológico, da língua francesa, ...

Continuando com nossa conversa, os ninhos são protegidos por um invólucro de barro amassado com saliva, chegando a ser tão resistentes como o melhor tijolo, e suas dimensões podem atingir de dois até quatro metros de altura.

Neste momento, reflita: Pensa que acidentes só acontecem nas cidades grandes? Pois se pensa, está cometendo um engano. Leia com atenção o que segue: nos prados rio-grandenses, os tacurus são temidos porque, meio destruídos e ocultos entre o capim, provocam a queda do animal quando, no galope, afunda nesses ninhos, quebrando a perna.

Algumas espécies de cupins habitam troncos de árvores ou o madeiramento das construções. No litoral do Rio de Janeiro e em Santos, por exemplo, a espécie *Cornitermes sp* chega a desvalorizar as casas "onde moram", porque corroem, especialmente, as vigas do telhado. Há espécies que atacam as raízes de um variado número de plantas ou mudas, sendo que nada se percebe, pois os cupins cavam pequenos túneis – que não são visíveis – no solo.

Há situações nas quais o cupim destrói uma moradia, mesmo sem corroer seu madeiramento. Não, não, não se trata de truque, não. Trata-se de uma situação bem real. Tanto é real que convido você a refletir sobre a delicada situação daquele pinheiro atacado pelos cupins. Talvez você descubra alguma maneira de salvá-lo. Mas, como devemos estar preparados para tudo, é preciso contar com a possibilidade de ter que derrubá-lo. Portanto.... você tem alguma idéia de como calcular a altura do pinheiro?

Falando de cupins, pinheiros e.... pirâmides, medir é preciso

Não sei se faz parte dos seus conhecimentos, mas, na Antigüidade, um matemático grego conseguiu determinar a altura das pirâmides do Egito. Usando uma vara e duas sombras, o tal matemático contribuiu para o surgimento da Trigonometria.

PESQUISA

Seria interessante, "nesta altura" da nossa conversa, você pesquisar o significado de "trigonometria"? Para isso, você poderia utilizar um "bom" dicionário da Língua Portuguesa, ou uma enciclopédia.

O termo "trigonometria", criado em 1595, pelo matemático alemão **Bartholomäus Pitiscus**, deriva das palavras gregas *trigono* e *metria*. No contexto da Matemática, *trigono* significa três ângulos e, *metria*, medida.

Quando falamos em Trigonometria, pensa-se em "triângulo". O termo triângulo vem do grego *trigonos*. Dito de outro modo, o termo triângulo significa "polígono de três lados".

Você sabia que, para os antigos maias, o triângulo é o glifo do raio do Sol, semelhante ao broto que forma o germe do milho, quando rompe a superfície do solo, quatro dias após o plantio do grão? Ligado ao Sol e ao milho, o triângulo é duas vezes símbolo de fecundidade.

Você sabe o que significa “glifo”? Ah, eu sabia... você já está ficando habituado a consultar o dicionário do nosso belo idioma, não é mesmo?

Mas, continuando, o triângulo é freqüentemente utilizado nos frisos ornamentais, na Índia, na Grécia, em Roma, por exemplo, e seu significado parece constante. O triângulo, com a ponta para cima, simboliza o fogo e o sexo masculino; com a ponta para baixo, simboliza a água e o sexo feminino. O “selo de Salomão” é composto de dois triângulos invertidos e significa, principalmente, a sabedoria humana. O triângulo equilátero, na tradição judaica, simboliza Deus, cujo nome não se pode pronunciar. Atenção: pesquise sobre o “selo de Salomão”, conversando com os colegas, professores e, também, recorrendo a livros e a Internet. Você ficará surpreso com o número de “respostas” diferentes que irá conseguir.

PESQUISA

Uma pausa: é evidente que você já tem conhecimentos sobre “triângulo equilátero”. Mas, caso tenha se esquecido... pesquise.

De novo, o triângulo. Além de sua conhecida importância no pitagorismo, o triângulo é, na alquimia, o símbolo do fogo.

PESQUISA

A propósito desta nossa conversa, você sabe quem é **Pitágoras**, não é mesmo? E você também sabe o que significa “alquimia”? Lembre-se: sempre é muito interessante deixar um dicionário da Língua Portuguesa bem próximo, nos momentos de leituras.

Você conhece a importância atribuída pela maçonaria ao triângulo? Sabe o significado do triângulo maçônico? Sabe alguma coisa a respeito da relação entre o triângulo de ponta para cima e o triângulo invertido? A obra *Dicionário de Símbolos* (CHEVALIER & CHEERBRANT, 2001) é muito interessante para pesquisar sobre triângulos. Consulte-a, você se encantará.

Falemos, agora, um pouco sobre a “Trigonometria”. Podemos começar afirmando que “Trigonometria é um assunto de conversa”. Que tal, gostou? Continue lendo...

Os primeiros trabalhos elementares, envolvendo conceitos trigonométricos, foram desenvolvidos pelos babilônios e antigos egípcios, que realizavam estudos e cálculos relativos a fenômenos astronômicos e geográficos, como a determinação de eclipses, fases da lua, distâncias inacessíveis e rotas de navegação.

Pausa para uma pergunta: você tem dúvidas sobre o que venha a ser “conceito”? Em que você pensa quando lê a expressão “conceitos trigonométricos”? Caso você não pense em nada... isto é preocupante.

Voltemos aos babilônios. Deve-se, também, aos babilônios, a divisão da circunferência, ainda, hoje em uso, ou seja, dividida em graus, minutos e segundos.

Entre os gregos, também é possível encontrar trabalhos ligados à Astronomia. Nesses trabalhos aparecem conceitos trigonométricos, como, por exemplo, a expressão $1/2 < \text{sen } 30^o < 1/18$, usada no trabalho denominado *Das grandezas e das distâncias ao Sol e à Lua*. O autor deste trabalho é **Aristarco de Samos** (310 a 250 a.C.).

Você já tem conhecimentos sobre “seno”. Portanto não há motivos para ficar perplexo ao ler “sen”.

Sugiro, caso, ainda, não saiba o significado de “$1/2 < \text{sen } 30^o < 1/18$”, que peça auxílio ao seu professor. Mas, penso que será muito tranqüilo, para você, investigar, “sozinho”, a respeito dessa expressão. Com certeza, irá se deparar com ela em seu próprio livro de Matemática.

Continuando, pode-se atribuir a **Hiparco de Nicéia** (século II a.C.), por muitos considerado o “Pai da Astronomia”, o estabelecimento das “bases da Trigonometria”, bem como a construção das primeiras “tabelas trigonométricas”.

Ei, o que se passa? Não há motivos para espanto, não é mesmo? Quando se constrói algo, parte-se de uma “base”, certo? Portanto, “bases da Trigonometria”.

Quanto à expressão “tabelas trigonométricas”, até mesmo um livro de Matemática destinado a alunos de 8ª série apresenta, trazendo comentários e ilustrações, uma tabela trigonométrica com valores de senos, co-senos e tangentes de um ângulo.

Mas, e **Ptolomeu** (85 a 165 d.C.)? Inspirando-se no trabalho de Hiparco e ampliando-o, escreve uma obra intitulada *Sintaxe matemática*, resultando num “tratado sobre Trigonometria”.

Lembre-se: o dicionário da Língua Portuguesa deve ser consultado sempre que uma dúvida “atrapalhar” nossa leitura. Assim, por exemplo, conheço pessoas que têm dificuldade em explicar o que seja “um tratado”. Trigonometria, você já sabe o que é. Mas... o que é um “tratado sobre Trigonometria?”

Até o século XII, os trabalhos sobre Trigonometria eram relacionados à Astronomia. Entre os árabes, destacam-se as contribuições de **Abulwafa** (940-998), do observatório de Bagdá, que construiu tábuas de senos e tangentes, com relativa precisão. Os árabes deram, ainda, uma grande contribuição: traduziram a obra de Ptolomeu que era composta por treze livros, dando-lhe o título de *Almagesto* ("o maior", "o magnífico").

Inicialmente considerada uma extensão da Geometria, com o trabalho do árabe Nasir Edin (1201-1274), a Trigonometria recebe um tratamento independente.

PESQUISA

Atenção, pergunte ao seu professor, ou pesquise, o que significa dizer que "uma ciência X, quando surgiu, era considerada como pertencendo ao domínio de uma outra ciência Y".

A propósito, menciona-se, aqui, o italiano Leonardo de Pisa (1175-1240), mais conhecido como **Fibonacci**.

Fibonacci publicou, em 1202, o texto *Liber Abaci*, onde apresentava três formas de solução para um mesmo problema: com o ábaco, com o jogo dos dedos das mãos e com os números indo-arábicos.

Muito popular no meio dos entendidos sobre criação de coelhos, ele descobriu uma sucessão numérica que hoje é conhecida como "seqüência de Fibonacci". Nesta seqüência, qualquer número é a soma dos dois anteriores, com exceção dos dois primeiros, que são unitários: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

O que há de interessante na seqüência de Fibonacci é que a razão entre dois de seus termos consecutivos encontra-se com freqüência na Natureza.

As sementes da pinha – fruto do pinheiro – estão distribuídas em espirais, umas no sentido horário, outras no sentido anti-horário. Se contarmos todas as sementes de duas espirais que se interseccionam, observa-se que esses números estão na razão "8 para 13". Com as protuberâncias da casca do abacaxi, a razão é "5 para 8". Num girassol, contando-se as sementes, nas espirais que têm origem numa mesma semente, encontram-se números que estão na razão "34 para 55".

Isto quer dizer que se encontram, na Natureza, elementos que guardam uma das razões da seqüência: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55... Veja que cada termo da "seqüência de Fibonacci" foi dividido pelo seu sucessor.

Graças à "seqüência de Fibonacci", pode-se resolver questões sobre número de sementes da pinha, sementes de girassol, folhas das plantas tipo milho, número de coelhos num tempo determinado, por exemplo. Tem-se, assim, um estudo "lá" da Idade Média, com aplicações, hoje, na Agricultura, na Indústria, incluindo-se, aqui, produção de óleos, tintas, carne, vestuário, calçados...

Veremos, agora, uma relação muito interessante: Matemática e Biologia, através da "seqüência de Fibonacci". Aliás, um professor poderia desafiar seus alunos questionando a possibilidade de uma criação de coelhos desenvolver-se com planejamento prévio, por exemplo.

Montaria um cenário onde o aluno pudesse se imaginar um autêntico “criador de coelhos”, propondo-lhe uma sociedade, dizendo: “Vamos imaginar que nossa criação comece com um casal de coelhos recém-nascidos, e todos os casais que teremos irão procriar, todos os meses, um novo casal, mas a partir do segundo mês de vida”. O professor poderia ir mais longe, ainda. Ele e seu “aluno sócio”, através de situações matemáticas desafiadoras, assumiriam o compromisso de fornecer “carne de coelho” para uma Instituição Beneficente que abriga um total de “x” crianças, por exemplo. Como saber, após determinado tempo, com quantos casais de coelho poderiam contar, para honrar o compromisso que assumiram. Professor e alunos poderiam envolver Nutrição e Animais, através de “n” atividades. Exemplifico: “um levantamento sobre os nutrientes da carne de coelho”; “pesquisando a relação alimento - construção do corpo”; “buscando, nas ciências da saúde, a relação entre sistema digestório e sistema digestivo”; “relacionando as fontes de vitamina B2 e B6 e as conseqüências da falta dessas vitaminas”. Mas, tudo inserido no cenário do Século XXI.

Responda: É possível associar a “seqüência de Fibonacci” com a ARTE?

A respeito da “seqüência de Fibonacci”, tem impressionantes aplicações em Física, onde os números de Fibonacci surgem por construção proposital e dão resultados interessantes, como, por exemplo, em Óptica.

Mas, por falar em Física, você já ouviu falar em “microtubos”? Já ouviu falar em Penrose, o físico inglês que foi orientador do famoso Stephen Hawking? Ele é um especialista em “buracos-negros” e tem realizado estudos sobre a “consciência”. Nesses estudos, estão envolvidos “microtubos”, “processos quânticos” e... a “seqüência de Fibonacci”

Mas, voltemos à Trigonometria, no século XII. Fibonacci escreveu a obra *Practica Geometriae* (1220), apresentando importantes aplicações de Trigonometria. São aplicações que havia aprendido em contatos feitos com árabes e hindus.

A propósito, Rhaeticus foi aluno de **Nicolau Copérnico**. Ah, “as seis razões trigonométricas”, você conhece, muito bem, não é mesmo?

No século XV, **Johan Muller** (1436-1476), mais conhecido pelo nome de **Regiomontanus**, escreveu, em 1464, a obra *De Triangulus Omnomodis* (O tratado dos triângulos). Esta obra é considerada como o primeiro livro europeu que trata a Trigonometria independente da Astronomia. Ainda, no século XV, foi construída a primeira tábua trigonométrica, por um matemático alemão, nascido na Baviera, chamado **Peurbach**.

Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576) publicou, em 1551, um tratado com uma introdução trigonométrica que apresentava, pela primeira vez juntas, as seis razões trigonométricas, além de tabelas de senos, tangentes e secantes.

PESQUISA

Fazendo uma pausa, consulte obras sobre a História da Matemática. Você verá como é fascinante.

Hoje em dia, a Trigonometria não se limita a estudar somente triângulos, suas aplicações abrangem outros campos de atividades como,

O nome “trigonometria” foi usado pela primeira vez por Bartolomeu Pitiscus (1561-1613), em seu livro Thesaurus Mathematicus, como sendo a ciência da resolução de triângulos.

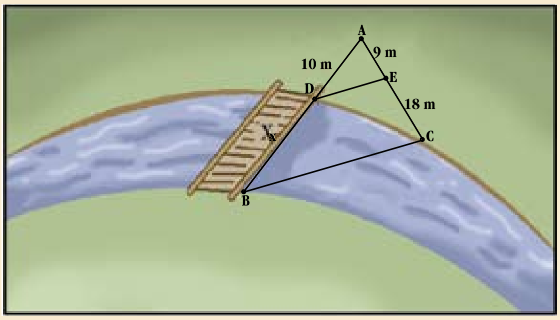
por exemplo, na Topografia (descrição de uma localidade); na Engenharia (construção de pontes sobre rios), envolvida com o conceito de proporcionalidade; na Astronomia (cálculo da distância da Terra à Lua, da Terra ao Sol e do diâmetro da Terra), usando-se observações e cálculos trigonométricos. É aplicada, também, na Agrimensura (arte de medir os campos, as terras), na Óptica, na Física (estudo de deslocamento, por exemplo), nas medidas de alturas (com base nas medidas dos comprimentos das sombras), ...

Algumas situações onde se pode aplicar a trigonometria

ATIVIDADE

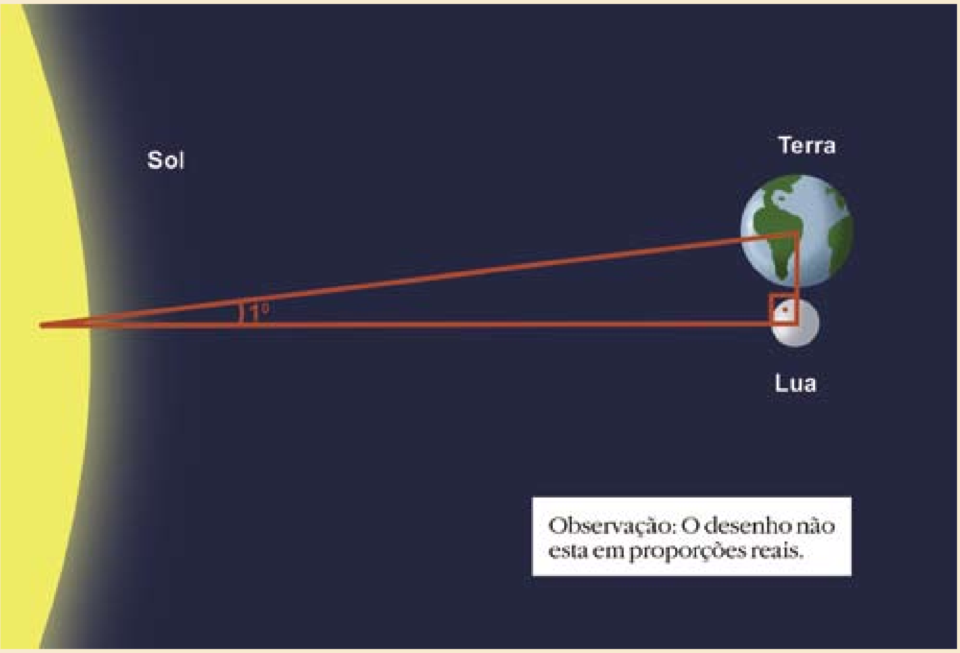
1. CONSTRUÇÃO DE PONTES

Situação-problema: Nas condições da figura ao lado, como se poderá determinar o comprimento de uma ponte que vai ser construída sobre o rio?



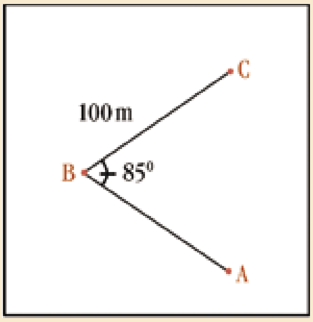
2. ASTRONOMIA

Situação-problema: Há um certo momento em que a Lua, a Terra e o Sol formam, praticamente, um triângulo retângulo:



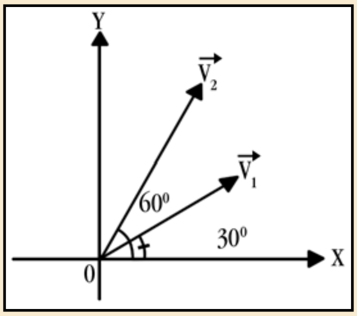
Como você verificaria que a distância da Terra à Lua é pelo menos 50 vezes menor que a distância da Terra ao Sol?

3. AGRIMENSURA



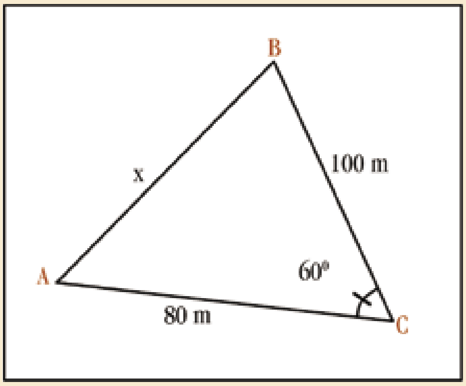
Situação-problema: Um agrimensor precisa determinar a distância entre dois pontos, A e C, que se situam em lados opostos de um mesmo rio. Sabe que, uma pessoa posicionada no ponto B, a uma distância x do ponto A, e no mesmo lado do rio onde fica o ponto A, enxerga, sob um ângulo de 85º, o ponto C a uma distância igual a 100 m. Sobrevoando o local, em um helicóptero, percebe que AC é perpendicular à AB. Que procedimento deveria ser adotado pelo agrimensor?

4. FÍSICA (Grandezas Vetoriais)



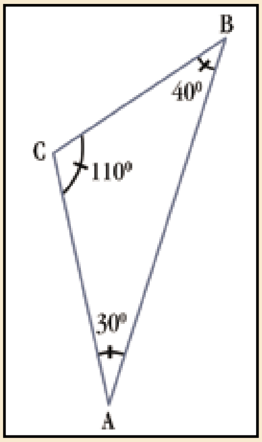
Situação-problema: Como se poderia determinar $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$, numa situação na qual o vetor $\vec{V}_1$, com 6 unidades de comprimento, faz um ângulo de 30º com o eixo X positivo, e $\vec{V}_2$, com 8 unidades de comprimento, faz um ângulo de 60º com o eixo X positivo?

5. SITUAÇÕES DO DIA-A-DIA



a) **Situação-problema**: Um observador está em A e necessita calcular sua distância até um ponto inacessível B. Os únicos dados que o observador possui estão apresentados na figura ao lado. Caso você estivesse com este desafio, contando com os conhecimentos que já possui, como resolveria a situação em referência?

b) **Situação-problema**: Supondo que seja possível consultar uma tabela trigonométrica, use o esquema abaixo para calcular a distância entre os pontos A e B.



Agora, atenção, quero que conheça o grego Tales (624-554 a.C.).

Nasceu em Mileto, por isso mesmo é mais conhecido como Tales de Mileto. Sobressaiu-se como filósofo, matemático e astrônomo.

Por volta do ano 600 a.C., o sábio grego Tales de Mileto fez uma viagem ao Egito. O faraó já conhecia sua fama de grande matemático. Dizia-se, por exemplo, que Tales era capaz de calcular a altura de uma construção, por maior que fosse, sem precisar subí-la.

Por ordem do monarca, alguns matemáticos egípcios foram ao encontro do visitante e pediram-lhe que calculasse a altura de uma pirâmide. Tales ouviu-os com atenção e se dispôs a atendê-los, prontamente. Já no deserto, próximo à pirâmide, o sábio fincou no chão uma vara, na vertical. Observando a posição da sombra, Tales deitou a vara no chão, a partir do ponto em que foi fincada, marcando na areia o tamanho do seu comprimento. Depois, voltou a vara à posição vertical.

– Vamos esperar alguns instantes, disse ele. Daqui a pouco poderei dar a resposta.

Ficaram todos ali, observando a sombra que a vara projetava. Num determinado momento, a sombra ficou exatamente do comprimento da vara. Tales disse então aos egípcios:

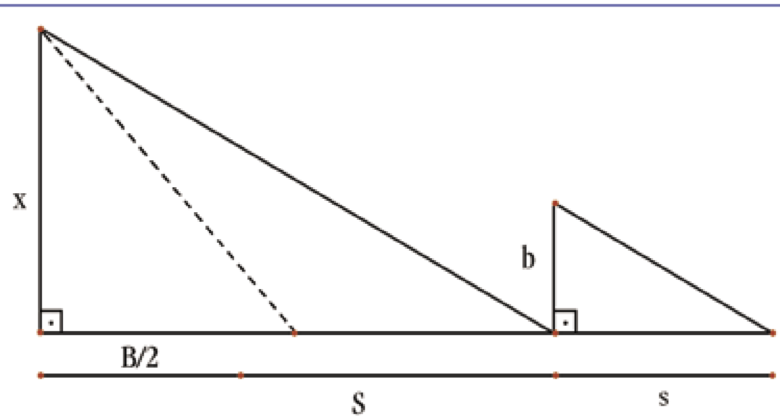
– Vão depressa até a pirâmide, meçam sua sombra e acrescentem ao resultado a medida da metade do lado da base. Essa soma é a altura exata da pirâmide (GUELLI, 1993, p.6).

Absolutamente, não se trata de truques nem de segredos, mas de um conhecimento de Geometria, usado para resolver uma questão prática.

Veja como Tales procedeu.

No momento em que a vara e sua sombra têm exatamente o mesmo tamanho, formam um triângulo semelhante ao outro triângulo que, por sua vez, é formado pela pirâmide e por sua sombra. Por semelhança de triângulos, Tales deduziu que a altura da pirâmide é igual à sombra mais a metade da base.

A situação pode ser representada pelos triângulos imaginários:



Sendo:

B/2 : metade do lado da base da pirâmide

b: comprimento da vara

S: comprimento da sombra da pirâmide

s: comprimento da sombra da vara

x: altura da pirâmide

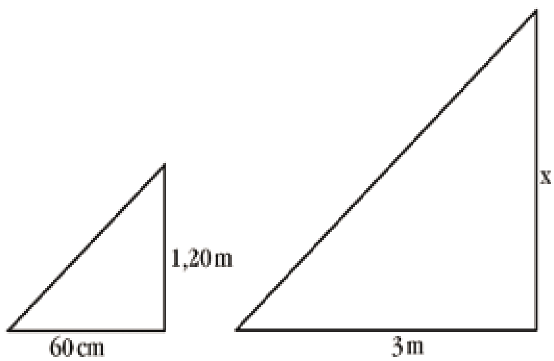
Como os raios solares são paralelos, os triângulos são semelhantes. Logo, os lados dos triângulos são proporcionais.

Então, Tales fez o seguinte:

$$\frac{x}{b} = \frac{\frac{B}{2} + S}{s}$$

Como Tales conhecia os valores de b, B, S e s, calculou o valor de *x*.

Depois de toda esta conversa, vamos supor que o comprimento da sombra de um edifício seja igual a 3 m, num instante em que o comprimento da sombra de uma árvore de 1,20 m é de 60 cm. Usando o procedimento adotado por Tales, veja como calcular a altura da árvore:



$$\frac{x}{3} = \frac{1,20}{0,60}$$

$0,60\ x = 3 \times 1,20$ (propriedade fundamental das proporções)

$0,60\ x = 3,60$

$x = 6$ m

ATIVIDADE

DESAFIO

Agora, você deve estar em condições de voltar àquele pinheiro que, atacado por cupins, precisa ser derrubado, a não ser que tenha encontrado uma solução para "vencer" os cupins e salvar o pinheiro. Suponha que a casa tem 3m de altura e o comprimento de sua sombra, num determinado momento mede 1,80 m, ao mesmo tempo em que o comprimento da sombra do pinheiro mede 6m. Neste caso, verifique se é possível derrubar o pinheiro, que está a uma distância de 11m da casa, sem destruí-la, usando o procedimento anterior.

SUGESTÃO PARA UM FINAL DE SEMANA ENSOLARADO

Com um cabo de vassoura e uma fita métrica, determine a altura da sua casa, de um prédio, de uma árvore ou poste, utilizando o processo de Tales.

Referências Bibliográficas

CHEVALIER, J.; GHEERBRANT, A. **Dicionário de símbolos**. 16ª ed. Tradução: Vera da Costa e Silva. Rio de Janeiro: JOSÉ OLYMPIO, 2001.

GUELLI, O. **Contando a história da matemática**: dando corda na trigonometria. São Paulo: ÁTICA, 1993.

Obras Consultadas

BONGIOVANNI,V.; LEITE, O.R.V.; LAUREANO, J.L.T. **Matemática e vida**. São Paulo: ÁTICA, 1993.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R.; GIOVANNI Jr, J.R. **Matemática fundamental**. São Paulo: FTD, 1994.

_____. **Matemática**: uma aventura do pensamento. 8ª ed. São Paulo: ÁTICA, 2001. 8ª série: Livro do professor.

IHERING, Rodolpho von. **Dicionário dos animais do Brasil**. Rio de Janeiro: DIFEL, 2002.

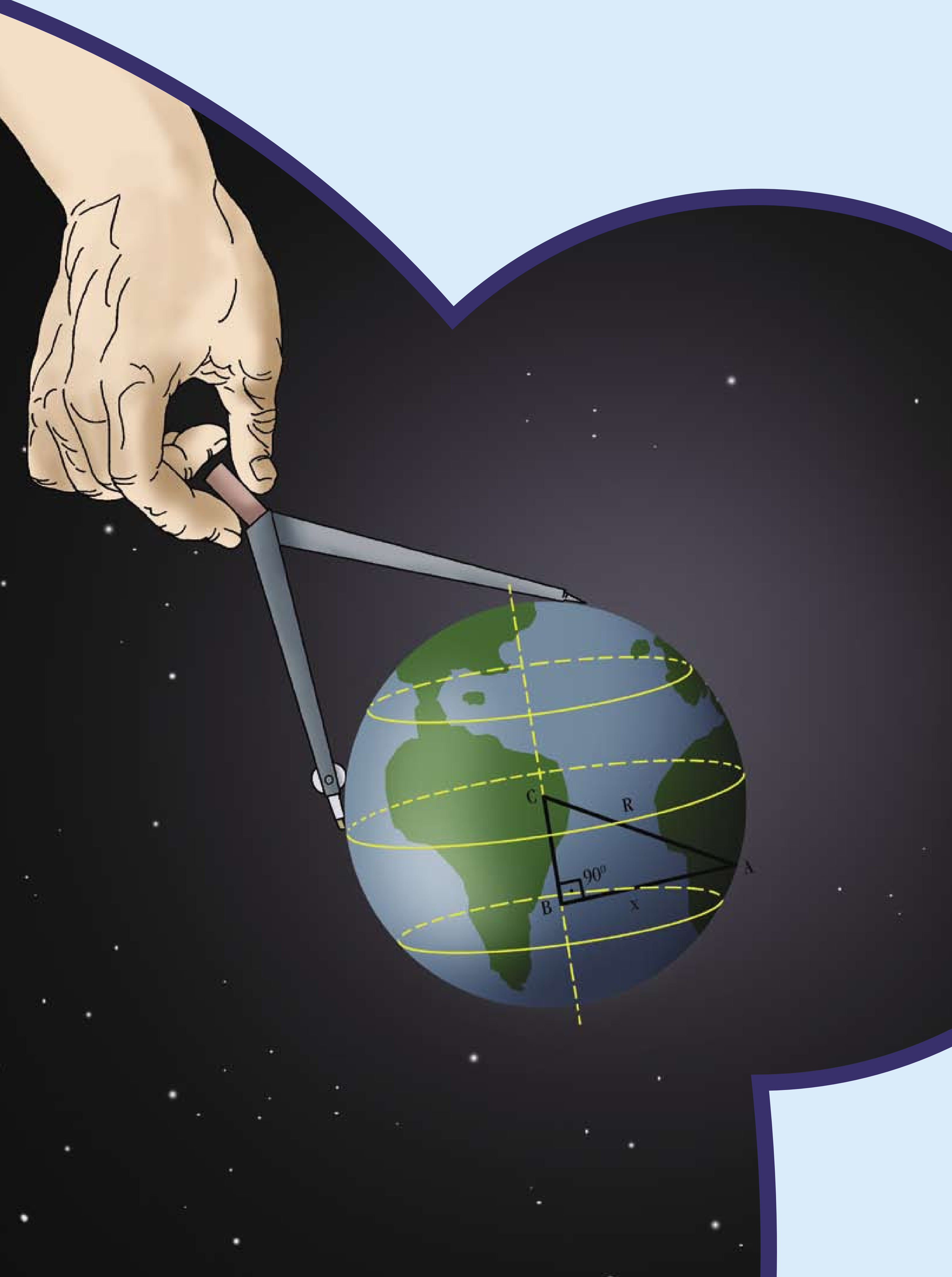
MONDIN, B. **Curso de Filosofia**. Tradução: Benôni Lemos. São Paulo: PAULINAS, 1981. v. 1.

REALE, G.; ANTISERI, D. **História da Filosofia**: Antigüidade e Idade Média. São Paulo: PAULINAS, 1990. v.1.

SOUZA, M. H. de; SPINELLI, V. **Matemática**. São Paulo: SCIPIONE, 1996, v. 1.

ANOTAÇÕES

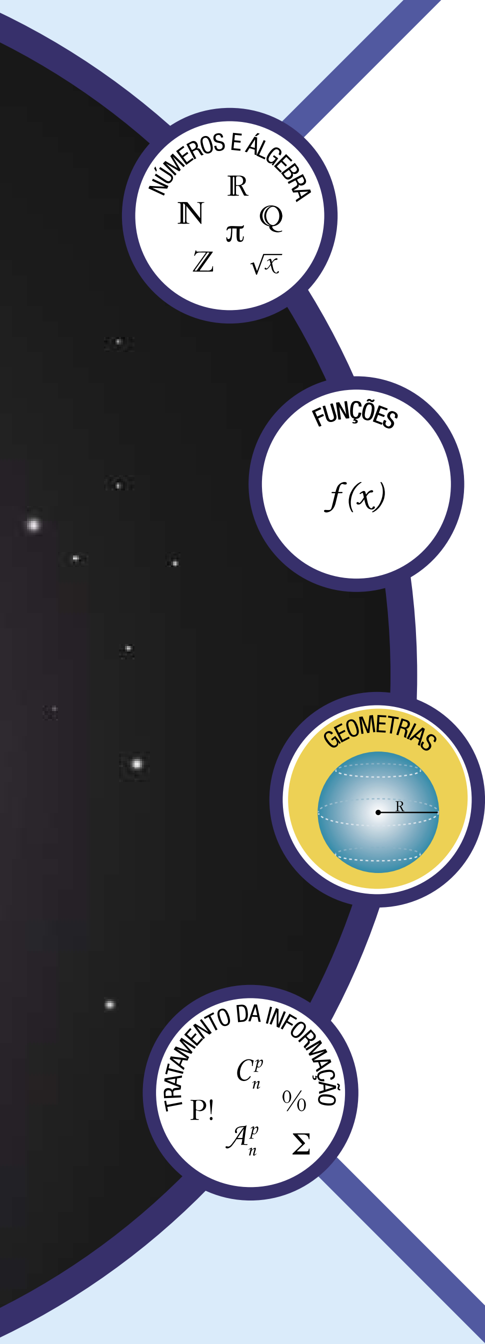
ANOTAÇÕES


C
R
A
90°
B
x

13

QUAL MATEMÁTICA ESTÁ PRESENTE NO RESGATE DO BARCO?

Donizete Gonçalves da Cruz[1]



Um grupo de pessoas sai num barco para um passeio e, por motivos desconhecidos, o barco se perde e o grupo fica à deriva em alto mar. O grupo possui apenas um aparelho de rádio, que emite somente sinal UHF (ultra-alto Freqüência), impossibilitando a comunicação verbal. Em terra organiza-se uma equipe de resgate, que segue em um avião que, além do tempo limitado para o sobrevôo, possui somente um rádio com capacidade para captar sinais emitidos do barco, também em UHF. Mas não existe, na equipe de resgate, nenhum profissional especializado no exercício de resgate. Há, porém, um professor de Matemática que, utilizando-se do conhecimento matemático, contribuiu para que o resgate fosse concretizado. **Em sua opinião, como isso ocorreu?**

[1]Colégio Estadual Loureiro Fernandes - EFM - Curitiba - PR

Na tentativa de busca dos problemas enfrentados, o homem, em muitas situações, encontrou na matemática meios que viabilizaram soluções. É comum, em algumas regiões africanas, os pescadores secarem peixes dispondo-os em volta de uma fogueira para que todos se aqueçam por igual, procurando colocá-los ao longo de uma curva, todos à mesma distância do fogo. São os conhecimentos matemáticos, mais precisamente o conhecimento geométrico, contribuindo para a solução de problemas.

De início, a geometria foi empregada na medição dos campos de cultivo e nas primeiras construções de edifícios. Os seus avanços ocorreram a partir de estudos desenvolvidos pelos gregos, enfatizando o aperfeiçoamento de trabalhos de medidas de outros povos.

Historicamente, mudanças acontecem e novos conceitos surgem, como, por exemplo, o método de Descartes, que introduz o sistema de coordenadas – que vocês já conhecem - e o de representar, em forma de curva plana, qualquer equação algébrica de duas incógnitas, que vocês verão na seqüência deste texto. Dessa forma, Descartes introduz no cenário da Geometria, a Geometria Analítica. Na concepção cartesiana, a Geometria Analítica, aplicando o método das coordenadas, estuda os objetos geométricos por meios algébricos.

Temos contato com objetos do cotidiano, usados pelas pessoas, que apresentam formato de uma circunferência. O movimento dos ponteiros de um relógio segue um movimento circular e desenha, em seu percurso, uma circunferência. Outros objetos, como moedas e CDs, muito presentes em nosso meio, também apresentam o mesmo formato.

Em tantas situações do dia-a-dia, deparamo-nos com rodas ou rotações com características que nos lembram a circunferência.

O que é a circunferência? Quais são seus elementos?

Vamos procurar respostas! Elas contribuirão para solucionar nosso problema principal.

Imaginamos um ponto, figura 1, e supomos que ele seja fixo. Nessa situação, podemos admitir que um conjunto de pontos, em um plano, que eqüidistam (se você não lembra... dicionários são ferramentas eficientes) do ponto fixo, seja uma circunferência. O ponto fixo é o centro da circunferência.

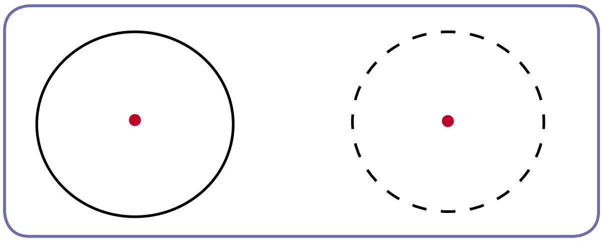


Figura 1: idéia de circunferência

É possível termos uma idéia sobre alguns elementos da circunferência. Observe os desenhos da figura 2 e faça um exercício de linguagem matemática, procurando definir estes elementos, a partir da observação das figuras.

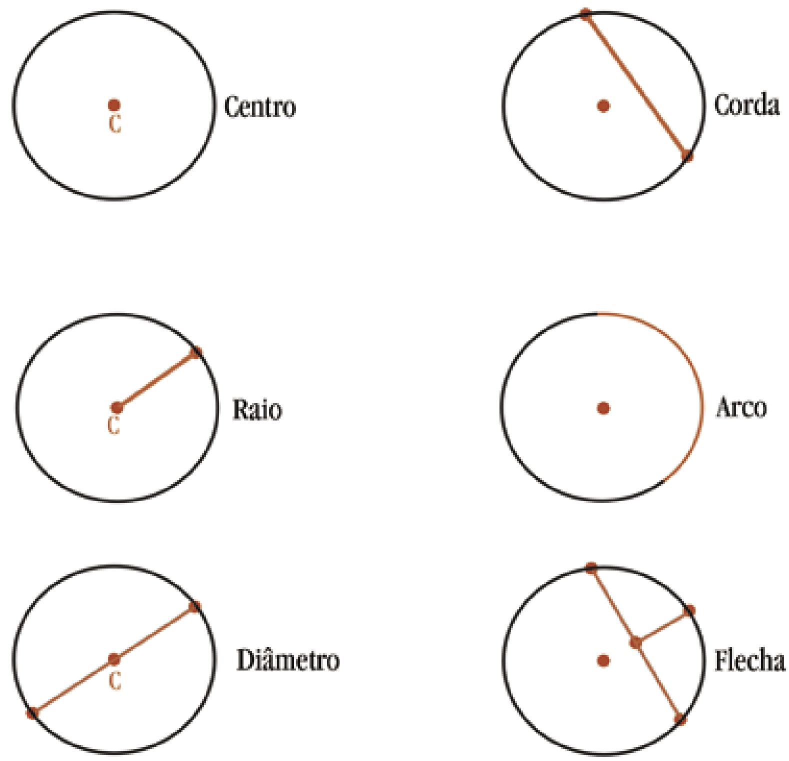


Figura 2: representação de elementos da circunferência

ATIVIDADE

Agora, compare a linguagem de suas definições com a linguagem padrão da Matemática, justificando com respostas escritas.

O diâmetro é uma corda?

Todo diâmetro é uma corda?

Toda corda é um diâmetro?

Os pontos pertencentes ao diâmetro pertencem à circunferência?

Os pontos pertencentes à circunferência pertencem ao diâmetro?

Qual é a sua idéia de arco?

O arco é um segmento de circunferência?

No seu ponto de vista, a afirmação "O arco possui apenas dois pontos" é falsa ou verdadeira?

Os pontos de um arco pertencem também à circunferência?

Circunferência possui lado de dentro e lado de fora? Possui pontos internos e pontos externos? O que significa, para você, "lado de dentro" e "lado de fora"?

Um segmento que sai do ponto médio da corda e vai a um ponto qualquer da circunferência pode ser considerado uma flecha?

Dando seqüência ao nosso trabalho, vamos relembrar um conceito importante: lembra do Teorema de Pitágoras?

No contexto de estudo que envolve circunferências não podemos deixar de abordar a Equação Reduzida da Circunferência e Equação Geral ou Desenvolvida da Circunferência, pois as mesmas se revelam importantes para realizarmos operações com ou sobre elementos da circunferência.

Vejamos:

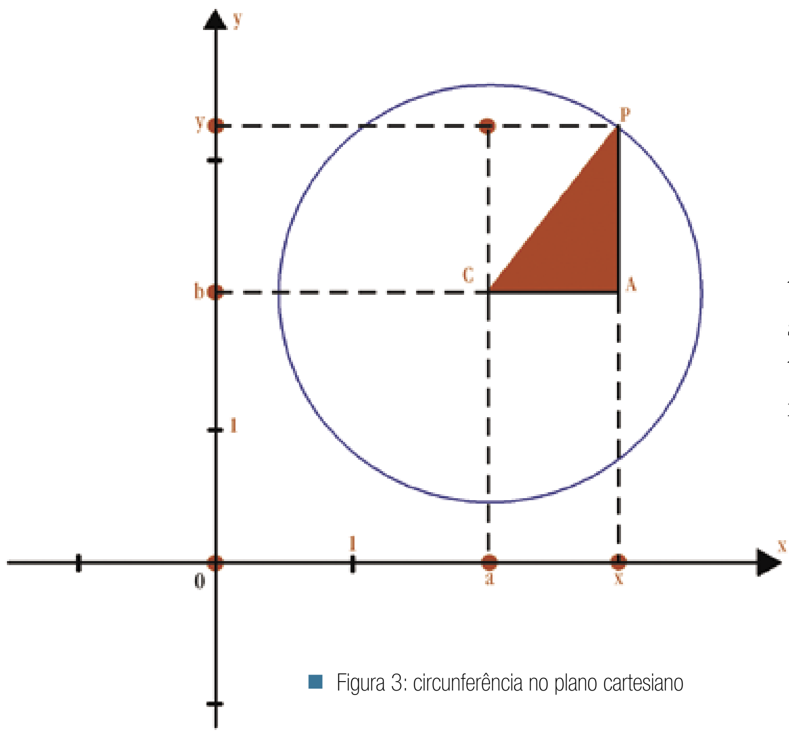


Figura 3: circunferência no plano cartesiano

Observe a figura 3 e procure interpretá-la, acompanhando os passos abaixo, para chegar à construção que se obterá da "equação reduzida" de uma circunferência.

Se você observar com atenção, perceberá que a figura 4, transladada da Figura em destaque e interna à circunferência no Plano Cartesiano, representa um triângulo retângulo. Assim, usando o conhecido Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(PC)^2 = (AC)^2 + (PA)^2$$

A distância do ponto P ao ponto C é o raio da circunferência, portanto podemos chamar o segmento $\overline{PC}$ de r.

A distância do ponto A ao ponto C é chamada de $(x - a)$ e a distância do ponto P ao ponto A é chamada de $(y - b)$.

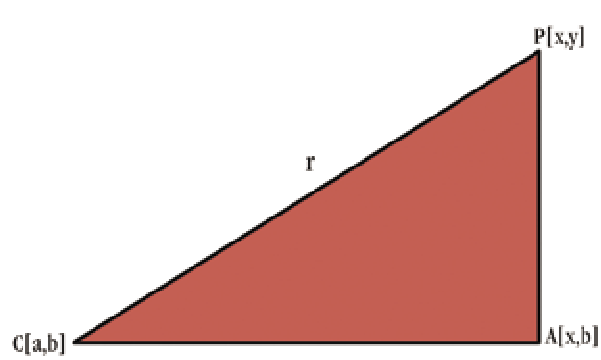


Figura 4: triângulo retângulo transladado da circunferência do Plano Cartesiano da figura 3

Portanto, uma circunferência que possui um ponto P(x,y), um centro C(a,b) e raio r, sendo $r > 0$, terá a equação reduzida $\mathbf{r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2}$.

ATIVIDADE

a) No caso de termos o centro da circunferência coincidindo com a origem do plano cartesiano, qual será a equação reduzida da circunferência? Demonstre-a.

b) Utilizando as informações contidas no desenvolvimento deste trabalho, e sabendo que para obter a equação da circunferência precisamos da coordenada do centro e a medida do raio, encontre a equação reduzida da circunferência de centro em (-1, 4) e raio de 4 cm.

Na linguagem matemática, o outro tipo de equação da circunferência é denominada de Equação Geral ou Desenvolvida da Circunferência. Essa equação é obtida a partir da equação reduzida da circunferência $\mathbf{r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2}$.

Vamos entender como se efetua esse desenvolvimento matemático?

1. Baseados em conceitos matemáticos já estudados, temos que desenvolver a equação reduzida $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$.
2. O desenvolvimento se dá seguinte maneira:
   $r^2 = (x - a) . (x - a) + (y - b) . (y - b)$.
3. Após realizar as multiplicações, temos:
   $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$.
4. Podemos subtrair em ambos os membros da equação o termo r^2, obteremos o que denominamos equação geral da circunferência, ou seja, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, que apresenta um ponto P(x,y) e centro C(a,b).
5. Podemos chamar o termo $- 2ax$ de αx, o termo $- 2by$ de βy e $a^2 + b^2 - r^2$ de Y. Assim, a equação se escreve como $x^2 + y^2 +\alpha x +\beta y + Y = 0$. A partir dessa generalização, é possível identificar se uma equação representa ou não uma circunferência.

Para que uma equação do tipo $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + Y = 0$ represente ou não uma circunferência, deve apresentar um raio r e um ponto C (a,b).

Tal constatação dá-se do seguinte modo: comparando a equação do item 4 com a equação do item 5, por meio de desenvolvimentos matemáticos, tem-se:

$$\alpha x = -2ax \Rightarrow a = -\frac{\alpha}{2};$$

$$\beta y = -2by \Rightarrow b = -\frac{\beta}{2};$$

$$Y = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - Y \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 + Y}.$$

ATIVIDADE

Agora é com você

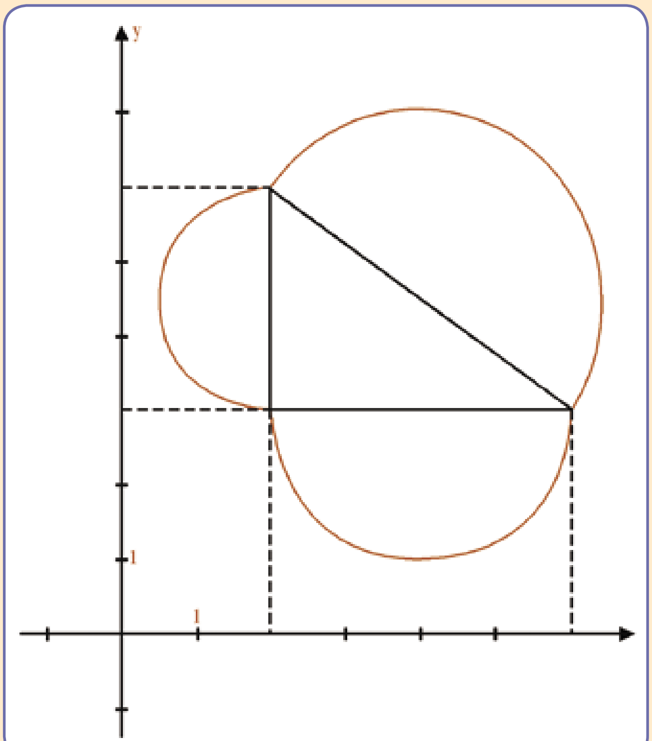
Diante do estudo feito até agora, e das informações que você já tem, investigue as respostas para as indagações abaixo:

a) Qual é a equação de circunferência cujo centro é C (-1, 4) e o raio é de 4 cm.

b) A equação $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$ representa uma circunferência?

c) Qual é a equação normal, geral ou desenvolvida da circunferência que possui raio de 2 cm e centro na coordenada (-1, 3)?

d) Na figura ao lado temos arcos contidos nas circunferências que têm o lado do triângulo retângulo como diâmetro. Encontre a equação dessas circunferências.



Vamos voltar ao nosso problema inicial e avançarmos no estudo dos sinais UHF e VHF? Sabe o que é o sinal UHF e VHF?

UHF é uma sigla proveniente do termo inglês *ultra high frequency*, que significa Freqüência ultra alta. Serve para designar faixa de transmissões de sinais, sendo comum para programações de sinais, como de televisão e de rádio.

Antes de seguirmos, é necessário entender que os sinais UHF e VHF são caracterizados como ondas eletromagnéticas. As ondas eletromagnéticas são geradas a partir da propagação de um campo eletromagnético. Para entender o mecanismo pelo qual se forma as ondas eletromagnéticas, imaginamos uma carga elétrica; um elétron, por exemplo; oscilando em torno de um ponto do espaço. Decorrente desses movimentos de oscilação desse elétron (e) temos a geração de um campo $\vec{B}$ oscilante, que de acordo com uma das leis de Maxwell, se acopla a um campo $\vec{E}$, associado ao elétron. Esta situação pode ser ilustrada pela figura 5, a seguir.

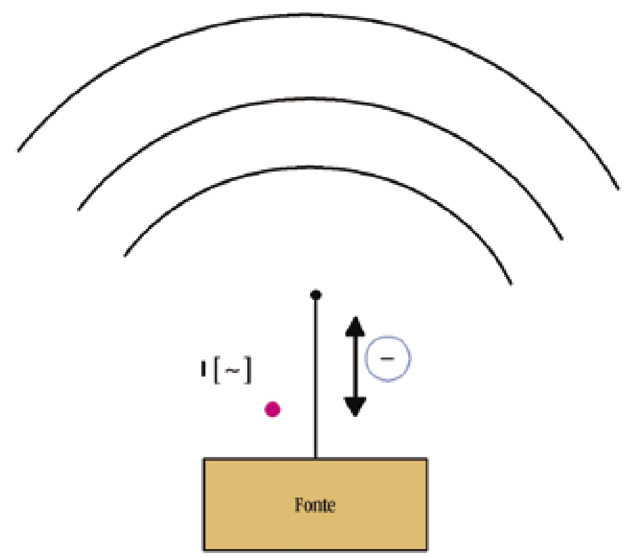
"Desse modo, mediante a geração seqüencial e alternada de campos magnéticos e elétricos, o campo eletromagnético se propaga no espaço, atingindo regiões cada vez mais distantes do ponto em que o elétron oscilou" (AMALDI, 1992, p. 381).

Há linhas de campo $\vec{E}$ circulando em torno de um campo $\vec{B}$ variável.

$$\Delta\vec{B} \rightarrow \vec{E}$$

Há linhas de campo $\vec{B}$ circulando em torno de um campo $\vec{E}$ variável.

$$\Delta\vec{E} \rightarrow \vec{E}$$



Supondo que as
cargas vem e vão.

Figura 5: Ilustração do processo de geração de um campo eletromagnético

Essas são leis de Maxwell que falam sobre os acoplamentos dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ numa onda eletromagnética.

Após esse processo de geração o campo eletromagnético passa ter existência autônoma e se propaga pelo espaço, autogerando-se independente da fonte que o produziu. Essa propriedade de transição que torna um campo eletromagnético independente de sua fonte geradora caracteriza o que denominamos de onda. O campo eletromagnético se propaga como uma onda, o que permite caracterizá-lo como ondas eletromagnéticas. Essas, não precisam de um meio material para se propagar, podendo inclusive se propagarem no vácuo.

Assim, as ondas de rádio são caracterizadas como ondas eletromagnéticas e são instrumentos extremamente rápidos e versáteis para veicular informações à pequenas e grandes distâncias. Tomamos, aqui, a definição de onda segundo Amaldi (1992, p. 223), que a define como "perturbação que se propaga no espaço. Ela transmite energia e não matéria". As ondas apresentam freqüência decorrente do número de oscilações por segundo que ela desempenha. A relação matemática que calcula a freqüência de uma onda é dada por $f = \frac{1}{t}$, em que f é a Freqüência, cuja medida é dada em Hertz (Hz), e t é a unidade de tempo dada em segundos. As ondas, cuja medida apresenta freqüência superior a 20 000 Hz, são chamadas de ultra-sons. Para que uma onda eletromagnética possa transportar informações contidas em palavras, sons e imagens, há a necessidade de modulá-la. A modulação é um processo pelo qual se modifica algumas características dessa onda, transformando-a em um sinal.

Mas qual é a relação entre os sinais UHF com a solução do problema?

Este é um fato relevante para a solução de nosso problema, pois, a distância do barco ao avião, considerada em termos de transmissão de sinal de rádio, é relativamente pequena. O sinal emitido e recebido pelos rádios em questão “apresenta um comportamento quase linear”. Outro ponto a destacar é que a transmissão do sinal em que estamos tratando “proporciona um melhor desempenho na presença de ruídos e de sinais interferentes” (LATHI, 1979, p. 218-221). Enfatizamos que os rádios emissores e receptores de sinais UHF possuem, em seus mecanismos de funcionamento, um discriminador balanceado pelo qual é possível ajustar a emissão e recepção de modo que proporcionem uma excelente linearidade na trajetória dos sinais. Isso significa que quando o rádio do avião captar pela primeira vez o sinal proveniente do barco e o avião continuar voando na mesma direção, num determinado momento, perderá o sinal. O *captar pela primeira vez o sinal*, para nós, é um ponto. No momento que *perder o sinal*, teremos um outro ponto. Podemos dizer que captar o *sinal* é o ponto do barco que chamaremos de centro de uma circunferência e, *perder o sinal*, o outro ponto, que, aqui diremos pertencente à circunferência.

ATIVIDADE

Agora é com você !!!

Use os conceitos que abordamos nas figuras 1 e 2 e continue a construir uma resposta ao problema.

PESQUISA

Evidentemente, que o estudo da acústica, cujos sinais de UHF e VHF são objetos de estudo, não se esgota aqui, bem como não são muito comuns ao nosso cotidiano, mesmo que diariamente vemos televisão e ouvimos rádio. Portanto, justifica-se outra pesquisa para buscarmos respostas e relacionamentos com nosso problema.

Portanto...

a) Investigue sobre a diferença entre sinal UHF e VHF.

b) Realize uma entrevista com um técnico procurando descobrir o mecanismo de funcionamento de uma estação de rádio.

Vocês viram até aqui, nessa produção, que os pontos que pertencem a uma circunferência eqüidistam de um ponto denominado centro da circunferência.

Este centro pode ser caracterizado como um ponto de equilíbrio?

Para responder a essa questão, observe o desenho a seguir.

Temos um triângulo inscrito na circunferência. Foi feito o seguinte: traçou-se dois segmentos. Um deles parte do ponto A em direção ao ponto B, este último, ponto médio do segmento $\overline{DE}$. O outro, parte do ponto D e vai ao ponto C, ponto médio do lado $\overline{AE}$ do triângulo. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam no ponto F, denominado baricentro do triângulo ou centro de equilíbrio e é chamado centro de gravidade do triângulo. Também demarcou-se três pontos pertencentes à circunferência, a saber, G, H e I. Os segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{IH}$ são cordas da circunferência. Em seguida, construiu a mediatriz de $\overline{GH}$ e a mediatriz de $\overline{IH}$. Uma definição matemática diz que toda mediatriz de uma corda passa pelo centro de uma circunferência. Isso significa que, quando preciso encontrar o centro de uma circunferência, construo pelo menos duas mediatrizes e marco sua interseção. O ponto de intersecção das mediatrizes é o centro da circunferência. O centro de gravidade do triângulo inscrito, na figura 5, coincide com o centro da circunferência.

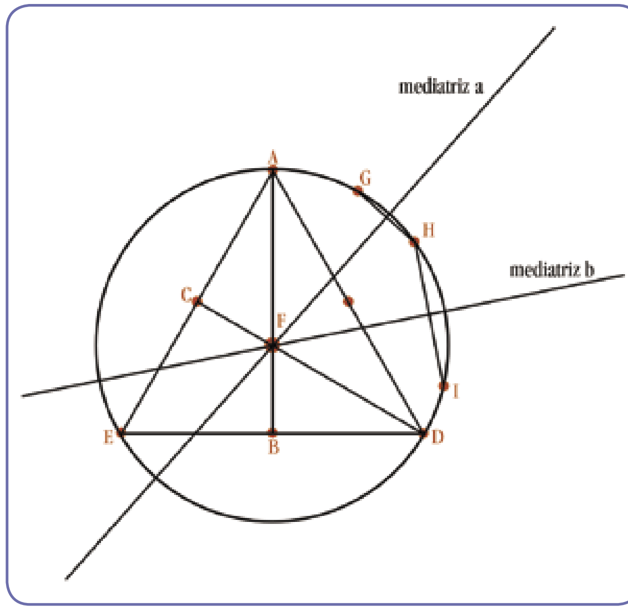


Figura 6: centro de gravidade do triângulo inscrito

ATIVIDADE

Boa pergunta!!!

No caso da figura 5, podemos dizer e comprovar que o centro da circunferência que circunscreve o triângulo é também seu centro de gravidade? (   ) SIM (   ) NÃO. Justifique.

Se você pegar uma figura circular, descobrir seu centro e colocá-la sobre uma ponta fina, ela se manterá suspensa, por conta de se apoiar no objeto no seu ponto central? Reúna-se em grupo com os colegas, façam essa experiência e escrevam a resposta.

Antes, você já tinha ouvido falar em ponto de equilíbrio? Sabia que a terra possui o seu baricentro, o seu centro de equilíbrio ou centro de gravidade? Que um carro possui seu centro de equilíbrio? Enfim, tanto a matéria viva quanto a matéria inaminada possui seu centro, ponto de equilíbrio.

E no nosso organismo, como isso se reflete? Qual é ponto de equilíbrio de nosso corpo?

Descobrir o centro de gravidade do organismo humano é um assunto pesquisado há muito tempo.

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) realizou estudos sobre as proporções corporais. Considerava o corpo humano como uma obra arquitetônica e, a partir desta sua crença, procurou analisar seus pontos de equilíbrio. O resultado de seus estudos revela que o centro de gravidade – CG – do organismo humano, situa-se próxima à região do umbigo.

O físico italiano Borelli, no ano de 1650, também realizou estudos buscando encontrar o CG do corpo humano. Para esse cientista, este centro se encontrava entre a púbis e a genitália.

Os irmãos Weber, no ano de 1836, aperfeiçoaram o método de Borelli e concluíram que o CG humano situa-se a 56,8 % da medida da estatura da pessoa a considerar dos pés acima.

Outros pesquisadores que realizaram estudos para determinar o local exato do CG humano foram Broune e Fischer, no ano de 1889. Esses estudiosos chegaram à conclusão que o CG humano se localiza à 54,8 % da medida da estatura da pessoa a considerar dos pés acima.

Você pode estar se perguntando, qual a importância do centro de gravidade do organismo humano? Aqui, vamos nos ater a uma função pela qual é muito válido conhecer o centro de gravidade do organismo humano, a prática corporal. É o centro de gravidade do organismo que regula todos os movimentos executados pelo nosso corpo. É onde se concentra o peso, resultado da ação da gravidade sobre nosso organismo.

Nossas atividades posturais estáticas e dinâmicas são reflexos do equilíbrio proporcionado que advém do CG. Nas práticas corporais, executamos movimentos de translação e rotação que dependem diretamente do equilíbrio proveniente do nosso centro de gravidade. O movimento de translação do organismo se dá quando nos movimentamos ao redor de um objeto. O movimento de rotação é quando exercemos movimentos em torno do nosso corpo, da nossa coluna vertebral. Podemos citar alguns movimentos que dependem do nosso centro de gravidade, tais como: a execução do saque numa partida de voleibol; as ações físicas exigidas numa partida de handebol; a corrida, o salto e a queda dos atletas que saltam à distância; a força do alterofilista ao levantar a barra; o salto do atleta para transpor a altura da vara no salto em altura e a corrida, o drible, o chapéu, a defesa e o chute numa partida de futebol.

Outro exemplo é o salto em barreira. Uma das aplicações do CG corporal é o salto do atleta pela barreira. Quando um barreirista perde contato com o solo, após o emprego da força para o salto, a trajetória do seu CG se encontra definida. Entretanto, de acordo com os movimentos do corpo, o CG adquire trajetórias diferentes. Isso pode ser observado na figura 6.

Se no momento que o corpo estiver no ar, como ilustrado na figura 7, o corredor elevar seu tronco, conseqüentemente, leva sua massa corporal para cima e, por conseguinte, seu CG. Mas, essa elevação não significa que ocorre alteração na trajetória do CG, pois nosso organismo não contraria as leis da Física. Na verdade, o que acontece é a subida do CG em relação ao corpo do corredor.

Se o corpo descer em relação à trajetória do CG, como resultado o atleta terá dificuldade para transpor a barreira. Se inclinar o tronco à frente, seu CG abaixa em relação ao corpo. Isso representa a subida do corpo em relação à trajetória do CG, o que facilita a passagem do membro inferior e reduz a resistência do ar. Como conseqüência, diminuirá a possibilidade de choque com a barreira. Pode-se dizer que minimiza a oscilação do CG no plano sagital e permite, ao corredor, executar de forma bem sucedida o salto.

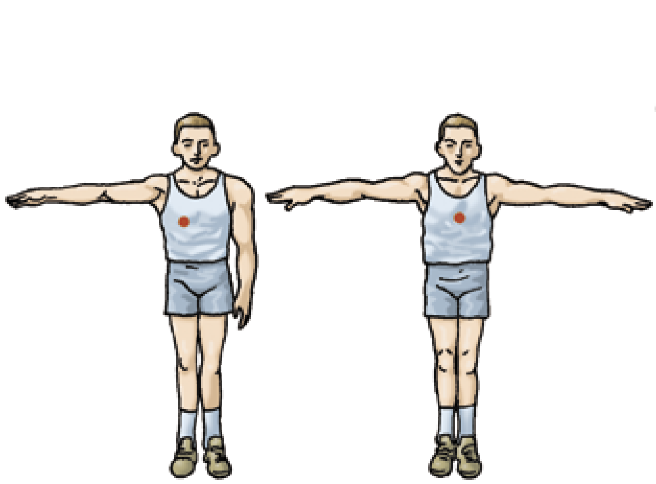


Figura 7 – Posições do CG segundo distribuição da massa corporal do organismo.

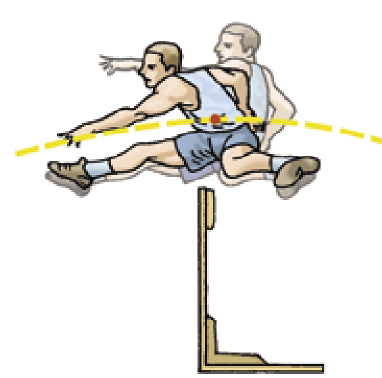


Figura 8 – O tronco e suas influências na posição relativa do CG dos saltos de barreiras, na fase aérea da passagem.

ATIVIDADE

Você sabe onde está localizado seu centro de gravidade? Existe uma fórmula matemática que diz que o centro de gravidade de uma pessoa, em estimativa e em centímetro, calcula-se a partir da região plantar (a partir dos pés). A fórmula é: **CG = (0,557 x altura) + 1,4 cm**. Com colegas e sob a orientação do professor, encontre o local do seu centro de gravidade.

O assunto que nos trouxe a estudar o CG do organismo é nosso problema inicial, ou seja, encontrar o barco que está perdido no mar. Puxamos o assunto de CG do organismo humano, relacionando o centro de gravidade de um triângulo inscrito numa circunferência na figura 5. Agora, vamos voltar ao nosso problema e tentar solucioná-lo. Aqui, fica uma sugestão de resolução do desafio.

Se você tem outras soluções, com usos diferentes do conhecimento matemático ou outro conhecimento, apresente-as para a turma.

1º Um ponto B, numa folha de papel, representa o barco à deriva.

2º Um outro ponto seria o A. Nesse ponto, o rádio do avião capta o 1º sinal emitido pelo rádio do barco.

3º Traça-se a circunferência de centro em B e que contém o ponto A.

4º A seguir, visando situar o ponto (B) de onde parte o sinal, o avião se põe a sobrevoar a região, em movimentos circulares. Nesse processo, ele perde o sinal enviado pelo barco. Tem-se, nesse instante, o ponto C.

5º No instante em que é restabelecida a captação do sinal, entre o barco e o avião, significa que a posição do avião dista do barco igual distância entre os pontos A e B.

6º Atendendo exigências técnicas e tempo mínimo, traça-se a corda que une A e C, pontos pertencentes à circunferência.

6º Usando-se o conhecimento matemático, construímos a mediatriz, passando pelo B e o ponto médio de AC.

7º É evidente que o avião deve seguir pela mediatriz rumo ao centro (B). Seguindo em direção contrária ao centro, perderá o sinal, sendo necessário reiniciar o processo.

Referências Bibliográficas

AMALDI, U. **Imagens da física**: as idéias e as experiências do pêndulo aos quarks. Tradução: TROTTA, F. São Paulo: Scipione, 1992.

LATHI, B. P. **Sistemas de comunicação**. Tradução: JUNQUEIRA, L. M. P. ; FERNANDES, L. M. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.

Obras Consultadas

MACHADO, N. J. **A geometria na sua vida**. São Paulo: Ática. 2003.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações**. São Paulo: Ática, 1999.

MACHADO, N. J. **Matemática por assunto**: geometria analítica. São Paulo: Scipione, 1988.

MELLO E.; CUNHA, G. N. **Curso de Desenho Geométrico e Elementar**. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1951.

RIVERA, F.; NEVES, J.; GONÇALVES, D. **Traçados em Desenho Geométrico**. Rio Grande: editora da Furg, 1986.

Documentos Consultados *ONLINE*

FERREIRA, M. S. **Aplicação de alguns conceitos biomecânicos à técnica de passagem de barreira**. Disponível em: <http://www.cbat.org.br>. Acesso em: 27 abr. 2006.

GRAÇA, W. C. **Centro de gravidade**: equilíbrio corporal. Disponível em : < http://winston.allhosting.com.br/ >. Acesso em: 23 abr. 2006.

Introdução

Tratamento da Informação

Quantas vezes você teve que tomar decisões na vida? Muitas, não? Nesses momentos, parou para pensar e calcular sobre as chances de tomar decisões corretas?

O conhecimento matemático contribui para você tomar decisões. Mas, o conhecimento matemático sempre esteve pronto e acabado de forma que as pessoas pudessem, por meio dele, tomar tais decisões? O homem, na sua trajetória histórica pela busca da resolução de seus problemas, criou um sistema de numeração para controlar a quantidade de coisas que possuía ou que produzia. Usando objetos que encontrava em seu entorno, como pedrinhas, nós em corda e também, referências corporais, foi possível chegar ao que chamamos, hoje, de conjuntos numéricos. Assim, as operações comuns passaram a ter novas maneiras de serem realizadas, como a contagem de grupos de objetos, ou seja, subconjuntos, nos quais se obedece a uma condição dada. Este foi o terreno propício para se desenvolver um conhecimento matemático como meio para resolver problemas que exigem análises e interpretações. Dessa forma, criou-se uma área da Matemática que trata de problemas de contagem exigindo cálculos elaborados e englobando uma grande variedade de técnicas de resolução.

Aqui vamos chamar essa área da Matemática de Tratamento da Informação. Para você, estudante, esse conhecimento é muito importante, pois lhe dá condições de realizar leituras críticas dos fatos que ocorrem em seu entorno, interpretar informações expressas por meio de tabelas, gráficos, dados percentuais, indicadores e conhecimento das possibilidades e chances de ocorrência de eventos. Isso se revela necessário, pois vivemos um momento histórico caracterizado pela facilidade e rapidez no acesso às informações. Ao mesmo tempo, exigindo o desenvolvimento do espírito crítico, a capacidade de analisar e tomar decisões em tantas situações da vida em sociedade.

Dessa forma, o ensino da Matemática deve ter o compromisso de contemplar a organização de dados, leitura de gráficos e análises estatísticas. Além disso, deverá lhe propiciar o desenvolvimento de seu raciocínio combinatório. Esse raciocínio poderá auxiliá-lo a lidar com maior segurança e criatividade com problemas de caráter aleatório.

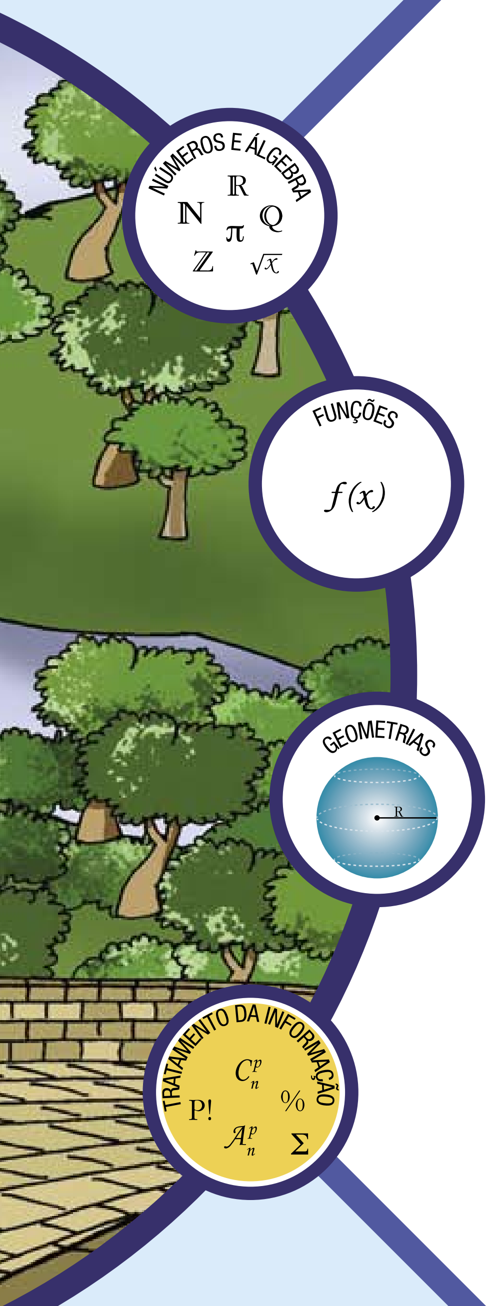
Isso se revela de fundamental importância diante de recursos tecnológicos inovadores, nos quais a presença das imagens é cada vez maior na atualidade. O texto **Leitura, Imagem e Informação**, por meio de questões relacionadas ao emprego e/ou desemprego, apresenta situações para a construção de conceitos estatísticos. Além disso, busca mostrar que, por meio das imagens, é possível uma leitura rápida, mas que também é possível manipular informações.

No texto **Arte de Contar**, são abordados aspectos históricos da contagem em situações variadas que envolvem o raciocínio combinatório, como na lógica das placas dos carros, dos números de telefone, no jogo da Mega-Sena e, inclusive, em fatos relacionados à natureza.

O texto **Sonho Assegurado?**, apresenta, por meio da prática de seguros de carros, o conteúdo de probabilidade. Aborda alguns aspectos históricos relacionados aos seguros dos navios em tempos de naufrágios e aos jogos de azar. Com a intenção de provocar uma reflexão, levanta algumas questões relacionadas à ética, uma vez que esta pode interferir no curso natural de fatos que acontecem no nosso dia-a-dia.

Considerando o mundo em constante mudança, são imprescindíveis conhecimentos que auxiliem uma rápida leitura e que possibilitem agilizar a tomada de decisão e fazer previsões que podem influenciar na vida pessoal e, também, na sua comunidade.


Pontes de
Königsberg



14

LEITURA, IMAGEM E INFORMAÇÃO

Loreni Aparecida Ferreira Baldini[1]

Faça uma leitura da seqüência de figuras a seguir:

O que esta seqüência de figuras está representando?

Dentro das figuras, observe os corações e as maletas. O que eles representam?

Discuta com sua turma.

Você sabe ler uma imagem?

Qual a importância da imagem nos dias de hoje?

[1]Colégio Estadual Padre José de Anchieta - EFM - Apucarana - PR

O mundo vive o momento da imagem. Com a ascensão da tecnologia, o aumento da informação é crescente nos últimos tempos. Com isso, as formas de leituras também estão mudando. As diferentes imagens, vistas através de *outdoors*, panfletos, revistas ou jornais, aparecem cada vez com maior freqüência. Além de saber ler textos, ler nas entrelinhas, ler o contexto, é preciso saber ler as imagens.

Como chegamos a esses tipos de leituras?

Na sua evolução, a escrita mostrou-se de diferentes formas. A mais comum foi a chamada escrita pictórica, cujos registros eram por meio de figuras. Por algum tempo, a escrita foi considerada uma tecnologia que permitia registrar a fala, para que outros pudessem receber as palavras que a distância e/ou o tempo os impediam de escutar.

Estudos sobre a linguagem mostram que a escrita não é apenas uma mera transcrição da fala, mas é também transcrição de uma idéia ou de um pensamento. Existem outras tecnologias que podem registrar a fala e outros tipos de linguagem e códigos.

Ao assistir um teatro ou uma dança é preciso fazer a leitura e a interpretação de muitos gestos ou de uma imagem, por exemplo. Assim, saber ler é também saber ler e interpretar as imagens, como gráficos e tabelas.

Qual a importância de ler gráficos ou tabelas?

Os diversos tipos de gráficos fazem parte da nossa vida. Para se ter uma compreensão mais ampla e crítica da realidade, é necessário saber ler e interpretar tabelas e gráficos, caso contrário, deixamos de receber a informação ou corremos o risco de não interpretar corretamente as situações neles representadas.

Um desafio!

Vamos entrar no argumento estatístico, ler gráficos e tabelas, e tentar entender algumas questões referentes ao emprego e/ou desemprego da população brasileira.

ATIVIDADE

Uma ferramenta importante para a compreensão, análise, previsão e tomadas de decisão de inúmeras situações na nossa vida é a **Estatística**.

- Você já participou de alguma pesquisa de opinião?

Veja uma situação que representa o resultado de uma pesquisa.

Trinta alunos de uma turma do Ensino Médio de um colégio do estado do Paraná foram entrevistados a respeito do vínculo empregatício de seus pais. Os dados obtidos estão organizados na tabela a seguir:

	Empregados com carteira assinada		Autônomos contribuintes		Total
	SIM	NÃO	SIM	NÃO	
Mãe	9	9	-	3	21
Pai	16	9	-	4	29
Total	25	18	-	7	50

Pesquisa aplicada numa turma do 3º ano do EM, do Colégio Estadual Pe. José de Anchieta, Apucarana-PR.

Uma tabela organizada em linhas e colunas permite uma primeira análise das informações. Vamos analisar essa tabela.

- Qual a proporção de pessoas sem carteira assinada? E dos trabalhadores autônomos sem contribuição para a Previdência Social?
- Qual a importância de ter carteira assinada ou ser contribuinte com a Previdência?
- Considerando a tabela, é possível saber quantas pessoas estão desempregadas? Verifique.

Nesta pesquisa foi possível entrevistar todos os alunos dessa turma, pois se trata de um grupo pequeno. Nas pesquisas o grupo observado é chamado de **População**.

Para coletar informações, seria possível entrevistar toda população de uma Nação?

Para alguns tipos de informações, como a do vínculo empregatício da comunidade, não é possível entrevistar toda população. Entrevista-se apenas um grupo, chamado de amostra, que irá representar toda população.

Por meio da amostra é possível observar e analisar o comportamento de toda uma população e tirar conclusões.

Mas será que uma população se refere apenas a pessoas? Ou pode ser um conjunto de elementos com características similares?

ATIVIDADE

Elabore estratégias para coleta de dados, para uma pesquisa por meio de amostra.

a) Organize sua turma em grupos e faça uma pesquisa para compreender a realidade do mundo do trabalho que ela está inserida. Para isso, pesquise quantas pessoas nas famílias estão empregadas e/ou desempregadas; ou ainda, quantos jovens trabalham sem carteira assinada.

b) Construa uma tabela com os dados desta pesquisa e apresente em painéis para as demais turmas.

c) Será que sua turma é uma **amostra** dos resultados que seriam obtidos na sua escola? E sua escola seria uma **amostra** de sua cidade? E sua cidade uma amostra...

PESQUISA

O que é uma amostra tendenciosa? Será que os resultados das pesquisas podem mudar em função da amostra? Reflita.

DEBATE

Ter carteira assinada é condição para a cidadania? Organize um debate na sua turma sobre este tema.

O trabalho dignifica o homem!!! Você já ouviu esta frase?

Ela se tornou um ditado popular. Você acredita nisso?

Trabalho todas as pessoas fazem, mas emprego, nem todas têm. O índice de desemprego é alto. Uma pessoa desempregada, bem como sua família, enfrentam muitas dificuldades. O mercado de trabalho exige cada vez mais pessoas qualificadas que competem por um número cada vez menor de vagas de trabalho.

Devido a ascensão tecnológica, surgem novas profissões nos mais diversos ramos e setores, exigindo profissionais que saibam lidar com a complexidade e que se adaptem rapidamente às novas mudanças.

Por outro lado, a revolução tecnológica, nas suas diferentes fases, tem grande influência nos altos índices de desemprego. Contribui para a extinção de algumas profissões e de algumas "vagas", como o caso dos bancários que em algumas regiões, foram dispensados em função da inserção dos terminais eletrônicos. Quando ocorrem situações como esta, em massa, chamamos de desemprego estrutural.

Uma pesquisa realizada em seis regiões metropolitanas pela PME - Pesquisa Mensal de Emprego, mostra que em janeiro de 2005 existiam aproximadamente 19,5 milhões de pessoas ocupadas. Essa pesquisa estimou que entre as pessoas ocupadas, 56,6% são homens e que as mulheres continuam sendo a minoria, 43,4%.

Uma tabela construída pela distribuição de freqüências de acordo com suas variáveis pode auxiliar melhor a compreensão dessas informações. Neste caso, o número de homens e mulheres é uma variável discreta porque só pode assumir valores dentro do conjunto dos números naturais.

PESQUISA

1ª Questão:

Pesquise como é chamada a freqüência na qual cada variável é representada por um número.

2ª Questão:

E como é chamada a freqüência que representa a razão entre o número pesquisado de cada variável em relação ao todo?

a) Organize os dados e construa uma tabela com duas colunas a partir das questões acima e das informações mostradas pela pesquisa PME-2005.

b) Pesquise o que é uma **variável contínua** e em que situações se apresentam.

No momento de arrumar um emprego existe o processo de seleção em relação a vários aspectos, entre eles, à mulher e à idade. A pesquisa mencionada revela que, entre as pessoas empregadas, 63,8% estão na faixa etária de 25 a 49 anos. Além disso, indica que 49,6% possuem 11 anos ou mais de estudos e que esse índice cresceu significativamente de 2003 para 2005.

ATIVIDADE

a) Com base nesses dados, quais as projeções que poderão ser feitas para o futuro em relação à idade? E em relação à escolaridade?

b) Discuta a relação existente entre estudo e emprego.

c) A expectativa de vida do brasileiro é, em média, aproximadamente de 72 anos. Qual a expectativa de empregos para uma pessoa com idade acima de 50 anos? Reflita!

A mídia muitas vezes apresenta resultados de pesquisas que parecem distantes da nossa realidade, sabe por quê? Ao observar um gráfico ou uma média, temos que estar atentos a várias informações, que muitas vezes não são tão evidentes. Analise a situação a seguir.

Numa empresa escolheram-se, ao acaso, cinco empregados para se fazer um estudo acerca dos salários. Obtiveram-se os seguintes resultados:

Empregado	A	B	C	D	E
Salários por mês	R$ 540	R$ 420	R$ 600	R$ 480	R$ 1800

PESQUISA

Como é calculada a média aritmética? E a mediana, como é obtida? Não se lembra? Investigue.

Analise as informações obtidas na tabela anterior e verifique:

- Os cinco empregados estariam de acordo com a informação de que a maioria dos empregados dessa empresa tem um salário igual à média?
- Qual a melhor forma de representar os salários nesta empresa, a média ou a mediana? Por quê?

Tem-se, ainda, outra pesquisa realizada pela Seade/Dieese - Fundação Sistema Estadual de Análises de Dados/Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Sócio-Econômicos - nas principais capitais, mostrando que, em 2004, os mais afetados pela queda na oferta de trabalho foram os jovens com idade entre 18 e 24 anos.

Os jovens são particularmente atingidos pelo desemprego estrutural, pela descontinuidade entre o aprendizado profissional e o ingresso na carreira.

Além disso, as pesquisas apontam que muitos jovens dão continuidade nos estudos por falta de emprego e por exigência do mercado.

Analise a situação representada na tabela a seguir.

Feito uma pesquisa numa empresa de porte médio constatou-se, entre seus funcionários, os seguintes níveis de escolaridade:

Ensino	Fundamental	Médio	Superior
Empregados	10	19	25

Neste caso, pode-se observar a Moda? Mas afinal, o que é a Moda?

O valor da amostra que representa a população que tem a maior freqüência, ou seja, que aparece o maior número de vezes é chamado de **Moda**.

As pesquisas revelam que a maior possibilidade de arrumar empregos está relacionada ao grau de escolaridade. Dessa maneira, para se ter um emprego **a moda é... estudar!!!**

E para ser Patrão?

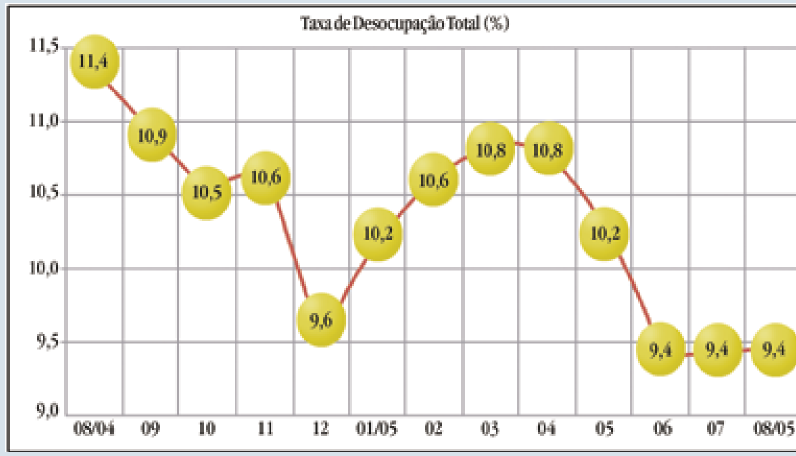
A tabela é uma forma de organizar os dados obtidos numa pesquisa, mas nem sempre ela permite que se veja rapidamente o que ela indica. Entretanto, os gráficos apresentam os resultados e permitem uma leitura mais rápida e de fácil compreensão.

ATIVIDADE

- Quais os tipos de gráficos que você conhece? Onde você os encontra?
- Busque em revistas ou jornais os diferentes tipos de gráficos.
- Faça a leitura desses gráficos e relacione-os com as informações.

DEBATE

Analisemos o gráfico ao lado, em que a PME do IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – registrou a taxa de desemprego, ou melhor, de desocupação, como é tratado pelo IBGE, nas principais capitais.



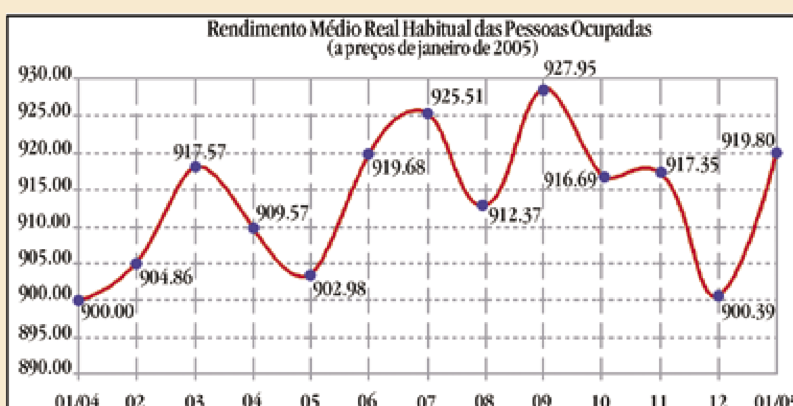
Fonte:http://www.ibge.gov.br

- Faça um paralelo entre as informações que esse gráfico mostra e as que ele poderia mostrar. Compare com seus colegas.
- Segundo o IPEA – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada – no mundo existe em torno de um bilhão de pessoas desempregadas ou subempregadas. Na sua opinião, quais fatores contribuem para a efetivação desses índices?

Grande parte dos trabalhadores brasileiros sonha com a estabilidade no emprego e com os salários em ascensão. Vamos refletir sobre a média dos salários em algumas capitais.

ATIVIDADE

O gráfico, ao lado, mostra o resultado de uma pesquisa realizada pelo IBGE, em seis regiões metropolitanas do Brasil e refere-se ao salário do brasileiro.



Fonte:http://www.ibge.gov.br

- Compare os salários representados no gráfico acima. Houve uma estabilidade?
- Em que período os salários foram crescentes? E decrescentes? Por quê? O que estava acontecendo para que isso ocorresse?
- Qual o salário médio recebido pelas pessoas investigadas no mês de janeiro de 2005?
- Podemos afirmar que toda população brasileira, ocupada, em janeiro de 2005, recebia um salário médio de R$ 919,80? Justifique.
- Discuta com os colegas da turma e verifique se essa média é condizente com o salário das pessoas do seu convívio.
- O Dieese é um órgão que trabalha com dados e estatística. Este órgão tem uma estimativa pa-

ra o salário ideal. Informe-se.

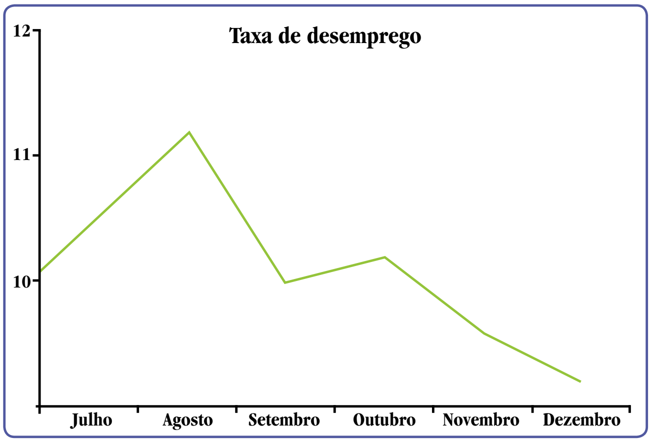
- Você deve ter percebido que os gráficos trazem uma diversidade de informações e o indivíduo, para recebê-las, precisa ter habilidades e percepção espacial para lidar com imagens. Afinal, por meio de um gráfico é possível até manipular informação.

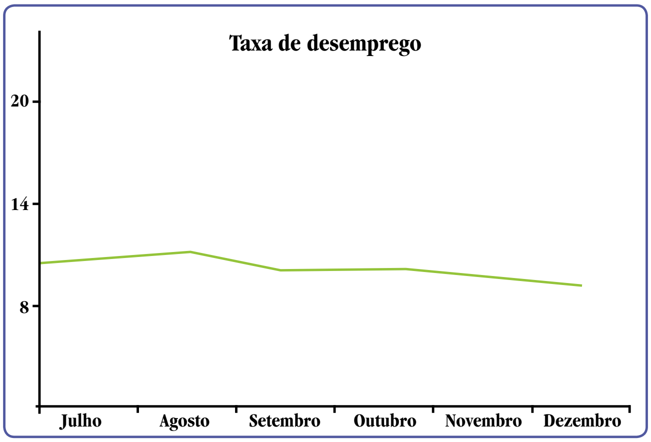
Você sabia que o resultado de uma pesquisa pode ser apresentado num gráfico, de maneira em que o leitor não leia determinadas informações?

Para melhor entender, vamos analisar algumas situações representadas nos gráficos.

Situação 1

Os dois gráficos abaixo apresentam os índices do desemprego num determinado período.



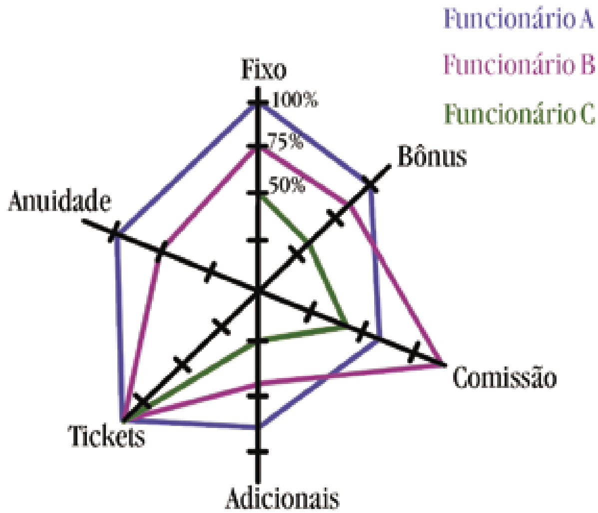


- O que aconteceu com o desemprego, no gráfico 1? E no gráfico 2?
- Qual deles melhor retrata a realidade? Por quê?
- Eles usam a mesma escala? Em que isso implica?

O uso da escala pode ter grande influência na leitura e interpretação da informação retratada num gráfico. Os gráficos apresentados são exemplos disso. Eles retratam a mesma informação, no entanto, no gráfico 1 é possível visualizar melhor as bruscas variações ocorridas, enquanto o gráfico 2 possibilita o entendimento de que a taxa do desemprego sofreu pequenas variações, ou seja, quase esteve constante no período.

Situação 2

Este é o gráfico de Radar, mostra a composição do salário de três funcionários de uma empresa. Veja a seguir:



Ele permite uma interpretação direta ou indireta? Rápida? Precisa? Confusa?

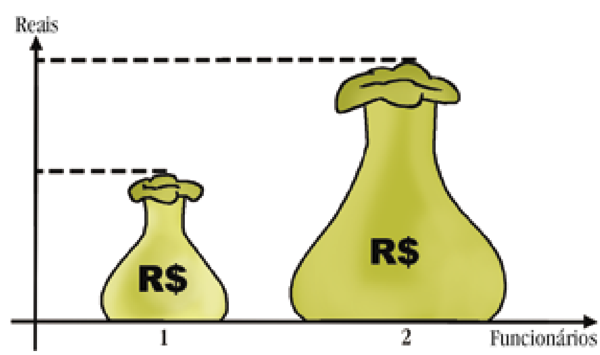
- Qual informação abrangeu maior área? O que representa?
- Qual o funcionário com maior tempo de serviço na empresa? Existe algum funcionário com pouco tempo de serviço nesta empresa?
- Investigue uma outra maneira de construir um gráfico, no plano cartesiano, com essas informações para facilitar sua leitura e interpretação dos dados. Construa esse gráfico.
- Investigue situações viáveis para a construção de gráfico de Radar e represente-a.

Situação 3

Você já conhece esse tipo de gráfico ao lado? Lembra-se de quando surgiu a escrita? Por meio de figuras...

É chamado de gráfico pictórico, permite uma leitura rápida, mas é preciso tomar cuidado para verificar se ele está representando corretamente as informações.

Vamos refletir sobre o salário de duas pessoas como representa o gráfico.



- Quem tem maior salário, a pessoa 1 ou a 2?
- Quanto a mais? O dobro, o triplo? Como saber?
- Se neste gráfico forem consideradas apenas duas dimensões, como está representado e, se as bases e as alturas forem o dobro uma da outra, o que ocorre com sua área?
- Mas, pensando em um saco cheio de dinheiro percebemos as três dimensões. Considerando também que as três dimensões aumentam na mesma proporção, o que acontece com o seu volume?
- Será que este gráfico foi construído com precisão, ou seja, proporcionalmente?

ATIVIDADE

Elabore um texto que apresente dados de alguma situação e sua representação num outro tipo de gráfico, de maneira que você possa obter todas as informações com maior precisão e clareza.

Muitas vezes temos acesso às informações, porém, temos que saber ler e interpretá-las. Como vimos, os gráficos podem facilitar ou dificultar o acesso à informação. Pode, também, ocultar elementos importantes.

DEBATE

Discuta com sua turma sobre:

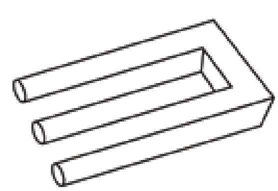
- De que forma os tipos de gráficos estabelecem relação com os tipos de informação.
- Como escolher o tipo do gráfico para melhor representar uma pesquisa.
- Como ler entrelinhas de um gráfico.
- Qual a importância da escolha da escala na construção de gráficos e como ela deve ser utilizada?

A contagem da população, os nascimentos, a mortalidade, o emprego/desemprego, entre outros, são temas de estudo e debate da nossa atualidade social e política, e a estatística possibilita chegar a muitas conclusões. Atualmente já existem alguns *software* ou programas, como o Excel, que auxiliam a tabulação de dados e também a construção dos gráficos, permitindo maior rapidez e precisão.

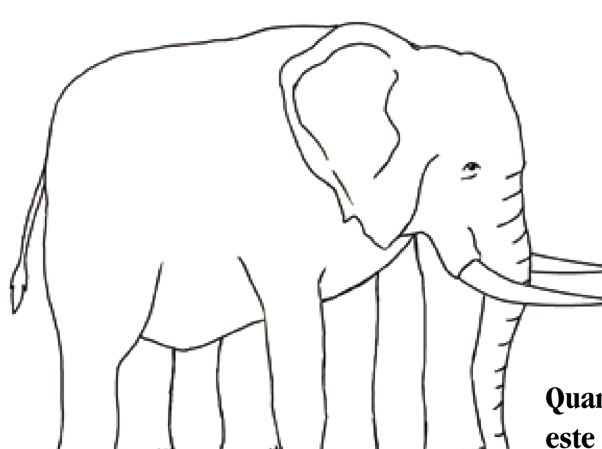
Ao considerarmos o mundo em rápida mudança um mundo de informações, como o que estamos vivendo, é imprescindível ter noções de estatística. Muitas vezes tabelas e gráficos sintetizam levantamentos; índices são comparados e analisados para defender idéias.

Afinal, será que tudo que vemos numa imagem é verdadeiro?

Analise as seguintes imagens:



Veja estas barras, a do meio existe?



Quantas patas tem este elefante?

Mas aqui começa uma nova história... Talvez relacionada à ilusão de óptica e ao nosso raciocínio espacial!

Obras Consultadas

BARZOTTO, V.H.; GNILARDI, M. I. **Mídia, Educação e leitura**. Campinas, SP: Ed. Anhembi Morumbi e Associação Brasileira de Leitura, 1999.

CAULOS. **Só dói quando eu respiro**. Porto Alegre: L&PM, 1976.

CHAVES, E. O. C. **A Tecnologia e os Paradigmas na Educação**: O Paradigma Letrado entre o Paradigma Oral e o Paradigma Audiovisual. Campinas, SP: Ed. Anhembi Morumbi e Associação Brasileira de Leitura, 1999.

Enciclopédia. **Cálculo-Probabildiade**. Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1989.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. Campinas 1998, p.134. Dissertação de Mestrado.

LOPES, C. A. E. A estatística e a probabilidade no currículo da escola básica e a formação dos professores. Rio de Janeiro, 2003. **Anais...** IX Seminário de Estatística Aplicada.

MAGNOLI, D. **Globalização:** Estado nacional e Espaço Mundial. São Paulo: Moderna, 1997.

NACIMENTOS, E. G. **Memória do fogo (I)**. Tradução: NEPOMUCENO, E. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983, 263 p.

WHITAKER, D. **Escolha da Carreira e Globalização**. São Paulo: Moderna, 1997.

Documentos Consultados *ONLINE*

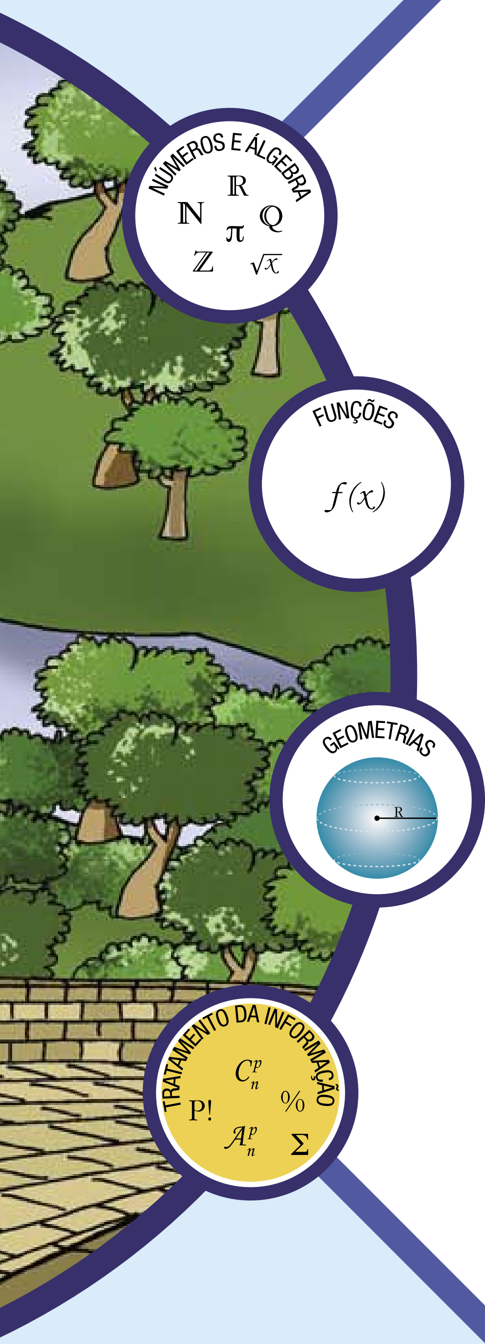
A Figurinha de uma só Dimensão. Capítulo 6. Disponível em: http://www.universal.net.br. Acesso em: 18 out. 2005.

Taxa de Ocupação. Comunicação Social. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 05 set. 2005.

COTTA, E. **Desemprego iguala recorde histórico de 20,6% em SP**; renda cai. Folha On-line. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 out. 2005.

Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/. Acesso em: 23 out. 2005.


Pontes de
Königsberg



15

ARTE DE CONTAR

Loreni Aparecida Ferreira Baldini[1]

Estamos tão habituados com as perguntas do tipo:

- Quantas pessoas estavam lá ...?
- Quantos dias faltam para acabar o ano?
- Quanto tempo é preciso para realizar um sonho?
- Quantos cálculos são efetuados por um algoritmo?
- Quantos? Quantos? Quantos?...

Nem paramos para pensar:

- Como podemos responder?
- É sempre possível responder imediatamente?
- Sempre precisamos contar?

Mas afinal, o que é a contagem?
Como ela surgiu?

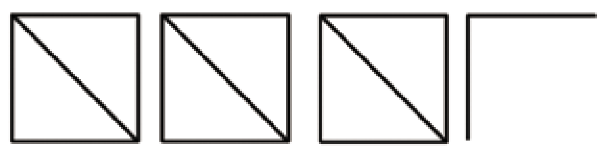
[1]Colégio Estadual Padre José de Anchieta - EFM - Apucarana - PR

A história da matemática nos revela que há muito tempo os pastores controlavam a quantidade de ovelhas de seus rebanhos, estabelecendo correspondência, um a um, entre pedras e ovelhas. Esse era um dos modos comuns de fazer contagem.

- Como era possível relacionar pedras e ovelhas?
- Num rebanho muito grande, como as ovelhas eram organizadas? Em filas? Em grupos?

Conta a história da matemática que, na pré-história, para fazer contagem, além de usar pedrinhas, também eram usadas conchas, grãos ou sementes, nós em cordas e marcas em ossos ou pedaços de madeiras. Mas ainda hoje, em algumas situações, usamos marcar, muitas vezes por agrupamento, para contar.

- Você já usou o tipo de marcação a seguir? Em que situações?



Num período histórico, chamado de pré-história o homem não plantava, nem criava animais e, por isso, não tinha necessidade de vender ou comprar. Nesse sentido, provavelmente as maneiras, pelas quais registravam as quantidades, eram suficientes para atender suas necessidades relacionadas à idéia de contagem.

O modo de viver desses povos comparado, por exemplo, com o nosso modo, passou por várias mudanças e as marcações, do tipo que eram feitas, não deram mais conta de organizar as quantidades. O homem sempre pesquisou e inventou coisas novas na busca de melhoria de vida. E uma delas, a invenção dos números, contribuiu para que pudéssemos registrar quantidades, ordenar, agrupar e contar. Dessa forma, não conseguimos imaginar, atualmente, certas situações sem os números:

- É possível fazer um calendário sem números?
- É possível gerenciar uma empresa sem números?
- É possível desenvolver um sistema de comunicação sem números?
- É possível que as tecnologias continuem se desenvolvendo sem os números?

Ao longo da história, o homem utilizou vários símbolos para representar as quantidades. Com o aprimoramento desses símbolos, chegou-se aos idealizados pelos indianos e divulgados pelos árabes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

PESQUISA

O zero é um número? Faça uma pesquisa sobre a invenção do zero para responder esta questão.

Posteriormente, com a invenção do zero e a ordenação destes algarismos, e por meio de diferenciados agrupamentos, podemos representar quantidades muito pequenas até as muito grandes, ordenar e contar.

Como é possível, com apenas dez símbolos, expressar a idéia de infinitas quantidades?

Agrupando apenas os algarismos 0, 1 e 2, quantos números são possíveis formar? Veja o quadro à direita.

0, 1, 2

10, 11, 12, 20, 21, 22

100, 101, 102, 110, 111, ...

...

10000100012, ...

...

Utilizando apenas três símbolos, porém, organizando-os em diferentes posições e em diferentes quantidades, temos infinitas representações de quantidades, as quais podem ser utilizadas para contagem.

DEBATE

Que tipos de quantidades o infinito representa? Muito grande? Muito pequena? Justifique.

Nós humanos, não conseguimos contar certas quantidades, no entanto o computadores nos superam e conseguem contar quantidades finitas muito grandes.

Como determinar a quantidade de alguns agrupamentos de elementos de um conjunto finito sem contá-los um a um?

ATIVIDADE

Investigue a situação a seguir:

Os meninos da rua onde Luana mora resolveram fazer placas para seus carrinhos de rolimãs. Luana propôs desenhar as placas desses carrinhos de acordo com as seguintes regras:

1. Usar somente as letras X e Z.
2. Usar somente os algarismos 1, 2 e 3.
3. Cada placa deve ter uma letra e três algarismos.

4. Não pode ter algarismo repetido numa mesma placa.
5. A letra deve sempre vir primeiro.
   - Quantas placas são possíveis formar considerando as regras acima?
   - E se fosse possível repetir os algarismos, quantas placas poderiam ser formadas?
   - Faça um esquema e verifique as situações acima.
   - Seria possível responder as questões anteriores sem registrar e sem contar uma a uma? Investigue.

A arte de arranjar ou combinar está presente, em muitas situações do dia-a-dia, na ciência e nas tecnologias. O estudo dessa arte teve seu início quando competidores de jogos de azar elaboraram processos gerais, na busca de estratégias para vencer alguns jogos. Com isso, surgiu uma abordagem matemática que trata da contagem, chamada “análise combinatória”, que estuda os diferentes tipos de agrupamentos e que permite determinar as quantidades de elementos de um conjunto finito, sem contá-lo um a um. Um dos aspectos desta abordagem é o “princípio fundamental da contagem”.

Dentro deste princípio existem alguns aspectos importantes. Analise as situações a seguir:

Para iniciar um jogo de computador é necessário fazer uma seleção em cada um dos três menus que ele apresenta. O primeiro menu tem quatro opções de números de jogadores; o segundo tem oito opções de nível de dificuldade; e o terceiro tem seis opções de velocidades. Quantas configurações possíveis têm esse jogo?

Suponha que passado para a segunda fase, o jogador tenha agora que escolher somente entre a opção de nível de dificuldade ou de velocidade. Quantas opções de escolha esse jogador teria?

- Compare as estratégias utilizadas para a solução da situação 1 e 2.
- Investigue como são chamados os princípios envolvidos nas duas situações e discuta com sua turma.
- Investigue outras situações que envolvem estes dois princípios.

Procurando entender estes princípios, analisemos algumas situações reais que envolvem a contagem.

Anteriormente, por volta da década de 1960, as placas de carros eram formadas somente por um algarismo que representava a cidade; neste caso o 7, seguido de duas dezenas.

Depois houve uma mudança no sistema e as placas passaram a ter duas letras seguidas de quatro algarismos.

Neste sistema, as duas letras indicavam a cidade. Nele, se alguém cometesse alguma negligência no trânsito, só de olhar para as letras iniciais da placa, uma vez que nem sempre é possível ler as letras pequenas que indicam o nome da cidade, as pessoas brincavam "tinha que ser de..." (nome da cidade).

Atualmente, como são formadas as placas dos carros?

Qual a lógica do sistema nacional de emplacamento?

O que representa as letras iniciais?

Com o aumento da frota de veículos, as placas na década de 1990 tiveram nova mudança, passaram a ter três letras seguidas de quatro algarismos e, hoje as letras são estabelecidas por estado brasileiro. As letras que podem ser usadas são as 23 do nosso alfabeto e ainda: k, w e y, e os algarismos de 0 a 9.

O novo sistema começou especificamente na cidade de Curitiba, e por isso, no Paraná, as placas iniciam-se com as letras A e B.

ATIVIDADE

- Escreva algumas placas de carros e observe se uma placa pode diferir de outra apenas porque apresenta um elemento diferente, ou por ter os mesmos elementos com ordem trocada.
- Sem considerar regras existentes para estados ou cidades, quantas placas eram possíveis formar utilizando duas letras do alfabeto e quatro algarismos? E se utilizar três letras e quatro algarismos? Compare e discuta os resultados.

ATIVIDADE

A seguir são apresentadas as condições reais de emplacamento no sistema atual para alguns estados.

Paraná: AAA 0001 a BEZ 9999
São Paulo: BFA 0001 a GKI 9999
Minas Gerais: GKL 0001 a HOK 9999
Rio Grande do Sul: IAQ 0001 a JDO 9999
Bahia: JKS 0001 a JSZ 9999

- Quantos carros são possíveis emplacar, nessas condições, em cada um desses estados?
- Nesse sistema, existem placas nas quais os algarismos sejam todos iguais a zero?
- Organizem-se em grupos e investigue as condições para os demais estados, de modo a determinar as possibilidades de emplacamento para todos os estados brasileiros.
- De acordo com o sistema de emplacamento, três letras e quatro algarismos, e considerando as letras que podem ser utilizadas em cada estado, quantos veículos podem ser emplacados no Brasil?
- Se houver aumento da frota de veículos, o que é mais viável: aumentar as letras ou os algarismos? Por quê?
- Verifique se na sua cidade tem carros com outras iniciais e discuta por que isso acontece.

Respeitando a letra inicial de cada estado, é permitido escolher as letras e até os algarismos para uma placa de carros, desde que você pague uma taxa.

- Investigue quantas placas é possível formar com as iniciais de seu nome.

A combinatória está presente nas várias áreas do conhecimento, inclusive na natureza. Nela, encontramos materiais nos estados físicos sólidos, líquidos e gasosos; assim como em várias cores ou texturas.

Na mesma forma que combinamos as letras para formar palavras com os mais diferentes significados, a natureza e o homem também combinam os elementos químicos formando as mais diferentes substâncias. Como nem todas as combinações (no sentido de ordenar ou agrupar ...) de letras formam palavras significativas, nem todas as combinações de átomos formam substâncias reais.

Os átomos de diferentes elementos combinam-se, em várias proporções, para formar compostos. A quantidade dos elementos químicos que entram na formação dos compostos deve ser definida, como numa "receita culinária", que para dar certo, devemos respeitar as proporções. É o que diz, em outras palavras, a Lei das Proporções Definidas: na formação de um determinado composto, seus elementos constituintes combinam-se sempre na mesma proporção de massa, independentemente da origem ou modo de preparação do composto.

Assim, para obtermos água num laboratório, devemos combinar hidrogênio e oxigênio sempre na mesma proporção, isto é, na razão de dois átomos de hidrogênio para um átomo de oxigênio. Ou ainda, a quantidade de hidrogênio tem que ser o dobro da quantidade de oxigênio, não pode ser mais e nem menos.

DEBATE

Você já tinha pensado sobre o que a fórmula da água H_2O, representa?

- Com base no que foi descrito acima, reflita sobre o que a fórmula da água representa e discuta com sua turma.

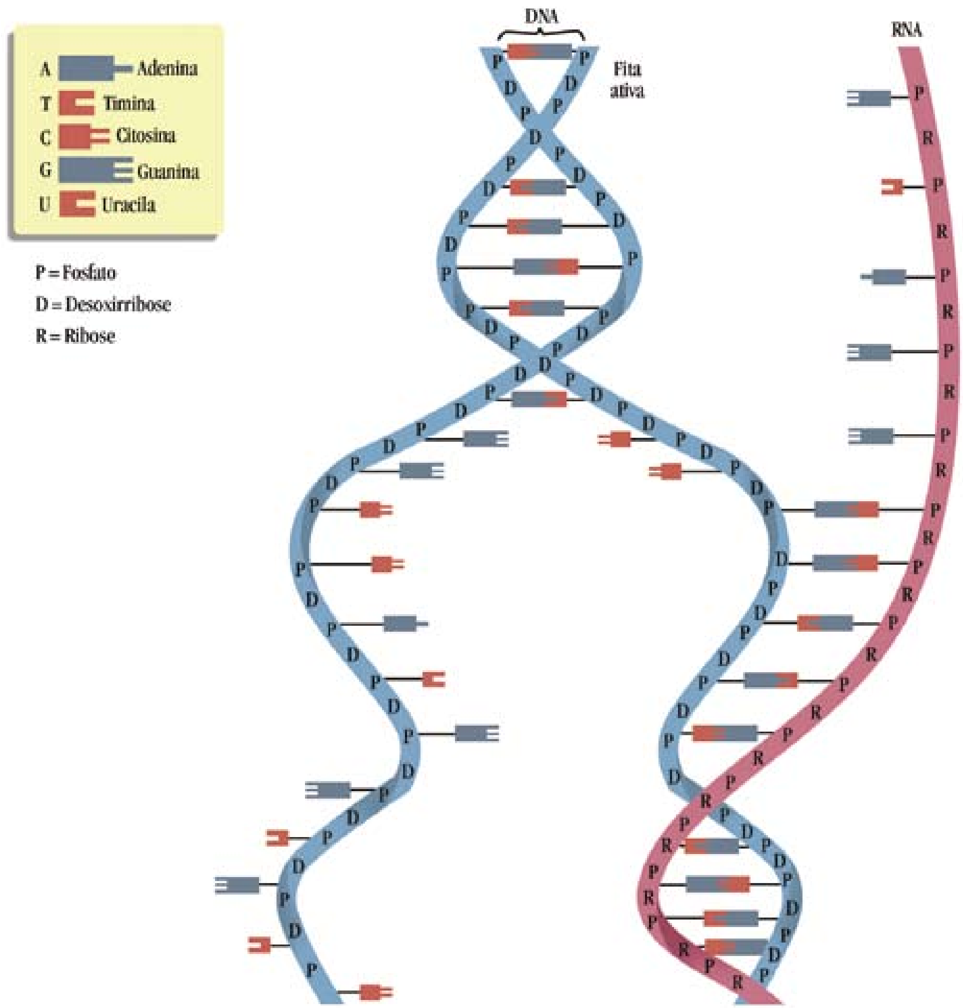
Poderíamos bancar o "cientista maluco" ou um alquimista e fazer as mais variadas combinações de substâncias na tentativa de descobrir novos compostos; como transformar todos os metais em ouro; inventar a "fórmula" do amor; a "fórmula" da felicidade; a "fórmula" da juventude; a "fórmula" da imortalidade, etc.

Porém, por meio da Ciência Matemática, da Química e com auxílio das tecnologias, já sabemos que nem todas as combinações serão possíveis num laboratório e não acontecem na natureza.

Você sabia que as combinações de certos aminoácidos formam o código genético responsável pela nossa vida?

Você já percebeu em crianças traços que lembram seus pais? Ou pessoas de uma mesma família com certos tipos de doenças? Por que isso ocorre?

O DNA - ácido desoxirribonucléico, encontrado nas células de todos os seres vivos - possui o código genético de cada indivíduo, é como um manual de instruções das células.



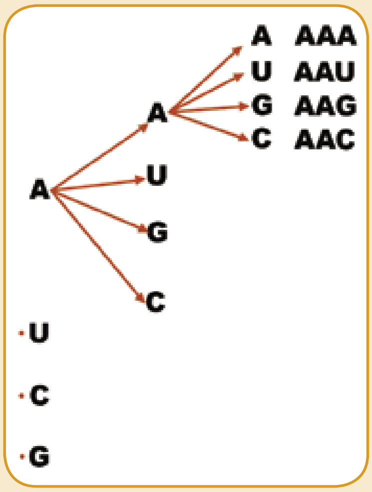
A molécula do DNA é composta por duas fitas e nucleotídeos que se ligam por quatro bases nitrogenadas, Adenina – A, Guanina – G, Citosina – C e Timina – T.

O código genético dado pela fita de DNA é traduzido em seqüências de aminoácidos que codificam as proteínas. Esse passo, DNA → proteínas, é dado pela molécula de RNA, ácido ribonucléico, que é produzido a partir de um DNA, mas com composição distinta, formado pelas quatro bases: Adenina – A, Guanina – G, Citosina – C e Uracila – U.

ATIVIDADE

Existem 20 aminoácidos, que são codificados por uma seqüência de três bases nitrogenadas, dentre as quatro bases A, G, C e U, formando as proteínas necessárias para o corpo.

Analise o seguinte esquema:



- A seqüência, ao lado, permitirá ver que existe mais de um agrupamento para cada aminoácido, como AAA e AAG é o aminoácido Fenilalanina.
- Utilizando a mesma lógica do A, complete a seqüência ao lado, para U, C e G, e verifique quantos agrupamentos são possíveis formar.
- Organizem-se em grupos e investigue o nome dos aminoácidos e a importância das proteínas para o nosso organismo.

ATIVIDADE

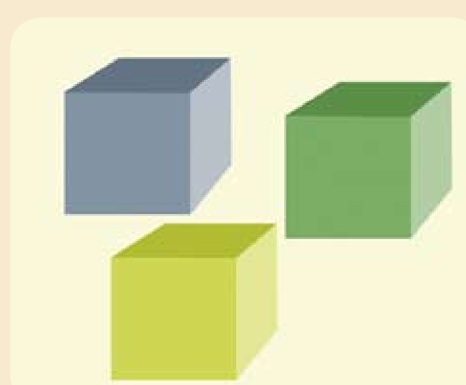
Você conhece a calculadora científica?

Já observou a tecla $\boxed{n!}$

- Experimente digitar o algarismo 3 e apertar esta tecla. Faça o mesmo com o 4, o 5, o 6... Registre os valores obtidos.

Vamos pensar em outra situação:

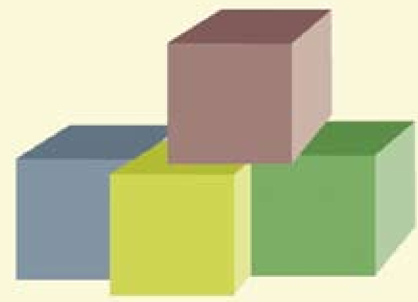
- Tendo três cubos de cores diferentes, de quantos modos é possível ordená-los, utilizando sempre os três? E se fossem quatro cubos de cores diferentes? E cinco? E seis? E...?
  Registre os valores obtidos.
- Compare os resultados obtidos, usando a calculadora, com as possíveis ordenações dos cubos e discuta com sua turma.
- Investigue o que significa n!. Afinal, esse conceito poderá auxiliar muito as próximas atividades.



ATIVIDADE

E se não utilizássemos todos os cubos na hora de agrupar, como seria? Analise.

- Se tivéssemos 3 cubos, de cores distintas, de quantos modos diferentes poderíamos agrupá-los usando apenas 1 de cada vez?
- Se tivéssemos 4, também de cores distintas, e usássemos apenas 2? E 5, usando apenas 3? E...?
- Em relação aos cubos, compare as estratégias utilizadas nessa atividade com a anterior.



Mas, e se houvesse cubos com cores repetidas, como seria? Investigue

Para proporcionar uma rede de telecomunicações mais capacitada para futuros crescimentos, recentemente uma das operadoras aumentou para 8 dígitos os números de telefones fixos de várias regiões do Brasil, adicionando o algarismo 3.

O acréscimo do algarismo 3 nos dígitos dos telefones fixos aumenta também as possibilidades de números de telefones?

Algumas informações nos ajudarão a analisar melhor esta situação. No sistema de numeração de telefones, cada assinante possui um código de acesso, o número do telefone, como costumamos dizer, que é discado quando a ligação é local. Normalmente os três ou quatro dígitos iniciais correspondem ao prefixo, e os quatro últimos ao número do assinante. Mas quando pretendemos nos comunicar com alguém de outra região, temos que digitar um outro código para que a ligação seja direcionada para tal local. O regulamento desta numeração define o zero como Prefixo Nacional, ou seja, o primeiro dígito a ser discado numa chamada para longa distância. Portanto, não existe prefixo regional começado com zero.

ATIVIDADE

Considerando as informações anteriores, responda:

- Quantos números de telefone de 7 dígitos são possíveis formar, utilizando os 10 algarismos? Tendo agora 8 dígitos, devido o acréscimo do algarismo 3 no primeiro dígito, quantos números são possíveis formar? Investigue e compare os resultados.
- Investigue os prefixos de sua cidade e verifique quantos números de telefones são possíveis formar com o sete dígitos e depois com 8 dígitos, no último caso, considere o 3 no início. Em seguida compare com o número de habitantes da cidade.
- Se ao invés do 3 o algarismo fosse outro, haveria diferença?
- Existem números de telefones repetidos em cidades diferentes? Discuta com os seus colegas.

ATIVIDADE

A explosão dos telefones móveis no Brasil é crescente, cerca de 7,574 milhões de pessoas já possuem celulares.

- Se uma operadora possui os prefixos 95, 96, 97, 98 e 99 para uma determinada região, quantos números de telefone de 8 dígitos são possíveis formar?
- Investigue na sua turma quantos estudantes possuem celulares e quais os prefixos. Utilizando esses diferentes prefixos, quantos números de telefones são possíveis formar?

Você conhece alguém que, na tentativa de ficar rico, costuma apostar em jogos de azar?

Ficar rico é uma das coisas que muita gente quer. Para isso, muitas pessoas trabalham, estudam e até fazem uma ”fezinha” na Mega Sena. Devido aos grandes prêmios oferecidos, este jogo sempre despertou muito interesse na população.

Seria possível descobrir uma estratégia para ganhar na Mega Sena, ou pelo menos melhorar as chances?

Vamos analisar o jogo da Mega Sena e, com isso, desenvolver o raciocínio combinatório.

Neste volante são apresentadas as regras para jogar:

Informações importantes:

Como e quem pode apostar?

Você pode escolher de 6 a 15 números entre os 60 do volante. A aposta mínima, de 6 números, custa R$ 1,50. Quanto mais números você escolher, maiores são as chances de ganhar e maior é o preço da aposta. Veja a tabela abaixo. Confira seu bilhete no ato da aposta. Segundo a lei, apenas maiores de 18 anos podem apostar.

Qual o preço das apostas?

Qtde. de números	6	7	8	9	10
Valor	1,50	10,50	42,00	126,00	315,00

03 - 07 - 28 - 35 - 47 - 56
03 - 07 - 28 - 35 - 56 - 47
03 - 07 - 28 - 56 - 47 - 35
07 - 03 - 28 - 35 - 47 - 56
28 - 07 - 03 - 35 - 47 - 56
03 - 07 - 35 - 28 - 47 - 56

Escolher as dezenas na hora de jogar quase sempre é um momento de muita indecisão. Veja, por exemplo, alguns modos diferentes de escolher as mesmas dezenas.

Se estas forem sorteadas, todos que apostaram nelas ganharão o prêmio.

DEBATE

- A ordem dos elementos constitui o mesmo grupo, ou seja, a uma mesma aposta ou palpite?
- Para jogar, importa a ordem em que as dezenas foram escolhidas?
- Existem possibilidades das dezenas serem sorteadas mais de uma vez?
- Compare essa situação com o tipo de agrupamentos das placas de carros ou dos telefones. O que há em comum nos agrupamentos? E de diferente?

Os aspectos envolvidos no Jogo da Mega Sena caracterizam um tipo de agrupamento, chamado "*Combinação*".

ATIVIDADE

Vamos agora analisar as possibilidades de ganhar na Mega Sena.

- Quantas apostas diferentes de 6 dezenas um jogador da Mega Sena deve fazer para que ele possa ter total garantia de ser um ganhador?
- Se uma pessoa apostar 7 dezenas, de quantos modos diferentes ela estará concorrendo? E se apostar 8? E se apostar 9? E se apostar 10?
- Compare o número de modos que concorrem as apostas de mais de 6 dezenas com o valor a ser pago da tabela.
- Quanto uma pessoa vai pagar se apostar em 15 dezenas?

Além de concorrer ao prêmio máximo da Mega Sena, o apostador concorre no mesmo volante a outros prêmios: a quina, para aqueles que acertam 5 dezenas e a quadra, quem acerta quatro dezenas.

Num jogo simples de 6 dezenas, da Mega Sena, o apostador concorre à quina com 5 dezenas. Para ser o ganhador, 5 dezenas deverão estar entre as 6 dezenas escolhida para aposta e 1 dezena deverá estar entre as 54 dezenas não escolhidas.

ATIVIDADE

- Uma pessoa que joga na Mega Sena, um jogo simples, de quantos modos diferentes estará concorrendo à quina? E a quadra?
- Alguém que joga em 10 dezenas, de quantos modos diferentes estará concorrendo à quina e a quadra?
- Se um jogador estiver disposto a apostar R$ 42,00 na Mega Sena, o que compensa mais, fazer um único jogo de 8 dezenas ou fazer os jogos simples de 6 dezenas?
- A situação anterior também é válida para a quina? E para a quadra? Investigue, calculando as possibilidades.

Curiosidade

O verso do volante da Mega-Sena traz a probabilidade de uma pessoa acertar na sena ou na quina ou na quadra. Veja:

Qual a probabilidade que tenho de acertar?

Segundo as probabilidades matemáticas, fazendo a aposta mínima, a chance de acertar a quadra é de 1:2 332, a quina é de 1:154 518 e a sena é de 1: 50 063 860.

Analisando as situações reflita sobre o que significa ter uma chance em cinqüenta milhões

PESQUISA

- Observe quantas vezes o número de habitantes do Brasil é maior que o número de resultados possíveis do sorteio e verifique as suas chances em relação ao país todo.
- Por que a chance de acertar a quadra é de 1:2 332 e quina 1:154 518? Justifique.

DEBATE

E se alguém resolvesse fazer todas as apostas possíveis, compensaria? Discuta com sua turma.

Tomar decisões, com base nas mais diferentes possibilidades de arranjar, ordenar e combinar elementos, pode ajudar muito a direcionar nossas ações perante situações reais do cotidiano!

Obras Consultadas

GERSTING, J. L., **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. 4ª ed. Teresópolis: Editora LTC, 2001. Trad. IORIO, Valéria M.

IMENES, L. M. & LELLIS, M. **Os números na história da civilização**. Col. Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1999.

IMENES, L. M. **A numeração indo-arábica**. Col. Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1989.

MAHAN, B. M. ; MYERS, R. J. **Química:** um curso universitário. Tradução: ARATI, Koiti et all. 4ª ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher Ltda, 1993.

MELLO. José Luiz P. Comparando Loterias no Ensino de probabilidades. **Revista do Professor de Matemática – SBM**. São Paulo: nº 44, 3º quad., 2000.

RODRIGUES. Flavio W. A mídia e a mega sena acumulada. **Revista do Professor de Matemática – SBM**. São Paulo: nº 43, 2º quad., 2000.

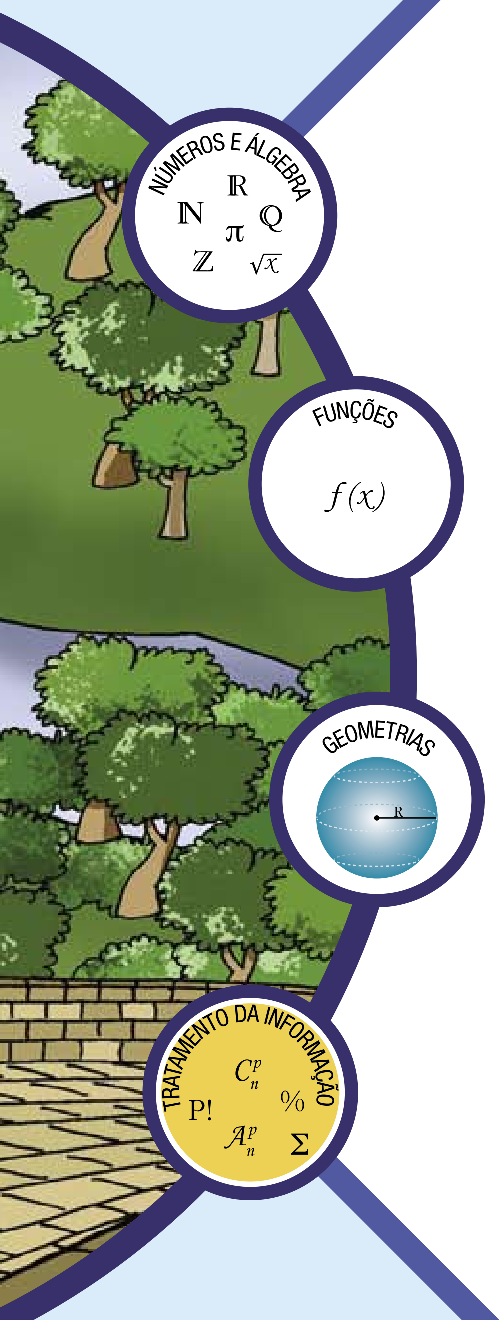
STRUIK, Dirk J. **História concisa das Matemáticas**. Tradução: GUERREIRO, J. G.S. 2ª ed. Lisboa: Gradiva. 1997.

Documentos Consultados *ONLINE*

MORAES, K. C. M. **O que é Engenharia Genética????** Campinas, 1998. Disponível em: http//cafe.cbmeg.unicamp.br/mano/eg /karen.htm. Acesso em: 04 dez. 2005.

ANOTAÇÕES


Pontes de
Königsberg

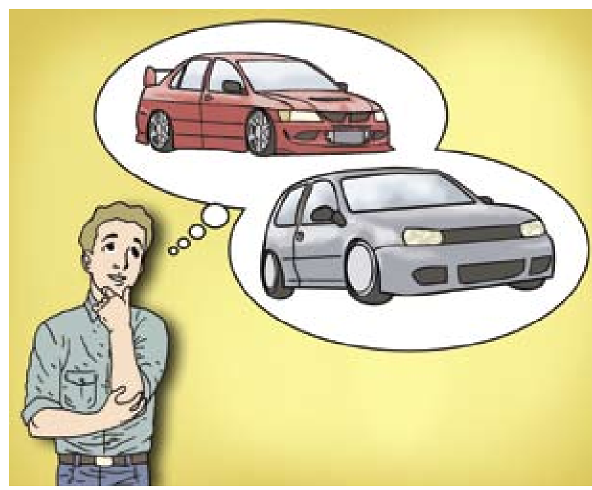


16

SONHO ASSEGURADO?

Loreni Aparecida Ferreira Baldini[1]

Ter um carro ainda é um sonho de muitas pessoas... Porém, será que todos têm o capital necessário para adquirir o carro com que sonham?



Não basta apenas ter o dinheiro necessário para comprar o carro. Há tantos roubos, e sempre pode acontecer algum acidente... Se você for bastante cuidadoso e nunca bater com seu carro, isso não quer dizer que outros sejam tão cuidadosos... e não possam bater com o carro deles no seu!!

Uma das despesas quase que obrigatórias para o proprietário de um carro é o seguro contra roubos e acidentes.

- **Qual o carro dos seus sonhos? É possível fazer seguro dele?**
- **Será que existe seguro para qualquer carro?**

[1]Colégio Estadual Padre José de Anchieta - EFM - Apucarana - PR

Muitas pessoas pensam que fazer seguro é coisa dos tempos modernos. Afinal, existe seguro para tantas coisas, tais como: carros, imóveis, móveis, animais, agricultura e até de vida. Mas temos informações de que a preocupação em fazer seguros existia entre os comerciantes marítimos, de civilizações que viveram antes de Cristo. Já nessa época buscava-se preservar as cargas contra naufrágios e roubos.

Um dos seguros muito comuns, atualmente, é o seguro de vida, que surgiu na Idade Média diante do crescimento das cidades. Assim, a prática dos seguros se estendeu até hoje, e a cada vez há mais procura.

As técnicas das seguradoras daqueles tempos eram baseadas nas experiências e, desse modo, estipulavam as taxas e prêmios correspondentes por meio das possibilidades de ocorrer roubos ou naufrágios.

Atualmente, como será que ocorre essa prática de seguros?

Você entende essa linguagem das seguradoras?

O que é isso que eles chamam de "prêmio"?

O que são as "taxas"?

O que é a "franquia"?

Para o cálculo da franquia e do prêmio anual, as seguradoras fazem um levantamento estatístico das características do veículo e do cliente, tais como:

- Idade e sexo do(s) condutor(es);
- Região de risco e garagem fechada ou aberta;
- Modelo (grande ou pequeno risco de roubo);
- Possuem acessórios que visam furtos, ou equipamentos de proteção a roubos e outros.

Esses fatores e outros são fundamentais no levantamento estatístico para definir os valores do prêmio e da franquia.

Um dos seguros mais caros, atualmente, é para condutores mais jovens solteiros e com idade entre 18 e 25 anos, pois, são considerados sujeitos a maior risco de acidentes, uma vez que as suas atividades de lazer são associadas ao consumo de bebidas, e portanto, podem se expor aos acidentes.

O modelo estatístico varia de acordo com o mercado entre tantos outros fatores. Veja a tabela abaixo, de uma pesquisa realizada na região de Foz do Iguaçu-PR, que considera a cobertura total do casco e não faz distinção por idade e nem por sexo.

Modelo Ano 2000 Categoria:Pick-up	Franquia (Média R$)	Valor do casco (Média R$)	Prêmio (Média R$)	Sinistro (Acidentes ou roubos)
Saveiro CL 1.6 Volkswagem	561	14.174,00	2.463,00	40,70%
Courier 1.3 Ford	471	13.872,00	1.262,00	23,30%

Fonte: SUSEP-Superintendência de Seguros Privados - Jul/Dez. de 2003

DEBATE

- Em sua opinião, o valor do seguro para estes tipos de carros, possuí um preço acessível? A que se deve o valor ser este, e não outro?
- Compare o valor do casco dos dois carros, a diferença é pequena, mas por que será que o prêmio tem uma diferença de valor tão grande?
- Analise outras informações que estão na tabela e discuta com sua turma.

Para tratar melhor este assunto, existe uma abordagem matemática, ela é feita através do “**cálculo de probabilidades**”. Veja como funciona:

Observando a tabela anterior podemos concluir que:

A cada 100 Saveiros circulando nesta região, aproximadamente 41 deles podem sofrer sinistros.

$$\boxed{\frac{41}{100} = 0{,}41 = 41\%}$$ de probabilidade de sinistro

A totalidade dos veículos Saveiro envolvidos nessa situação recebe o nome de **Espaço Amostral**.

O possível envolvimento de um Saveiro em sinistros recebe o nome de **Evento**.

Dessa forma, concluímos que a probabilidade de ocorrência de um evento é a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento.

É possível saber com certeza quais dos automóveis vão se envolver em sinistros?

Podemos tentar prever, com base no que já aconteceu, a possibilidade do que venha a acontecer com os Saveiros, porém não temos como saber qual deles é que vai, realmente, sofrer um sinistro. Quando as situações são descritas dessa maneira, em termos de chances, elas podem ser chamadas de Experimentos Aleatórios.

Assim, descobrimos que é com base em estatísticas, feitas por meio de amostras, que as seguradoras analisam as **probabilidades** de acontecer roubos ou acidentes, gerando assim, um sistema de informações baseado no perfil do veículo e do seu condutor; depois disso, de acordo com critérios definidos pelo mercado, é que se calcula o valor do prêmio e da franquia.

Não é muito simples fazer estes cálculos, e talvez por isso, a maioria das seguradoras adota valores tabelados... sem que se saiba quem foi que os calculou inicialmente. E se esse "calculador" cometer erros? Quem saberia como verificar isso?

PESQUISA

- Investigue outras situações que sugerem experimentos aleatórios, como os dos carros.
- Investigue outro tipo de experimento. Qual?
- Represente essa razão que indica a Probabilidade de um evento de maneira que sirva para qualquer situação como essa.

E o carro dos sonhos, qual será a probabilidade de sinistros? Investigue.

Diante dessa situação podemos perceber que a análise de dados e as tomadas de decisões são, na maioria das vezes, relacionadas ao espaço amostral, que muitas vezes está relacionado a uma amostra. Mas será que sempre se leva em conta o tamanho da amostra para tais conclusões? Veja a seguir uma situação curiosa que nos faz pensar na influência do tamanho de um espaço amostral.

Quando se trata do nascimento de uma criança, qual a probabilidade de nascer uma menina ou de nascer um menino?

Analise a situação:

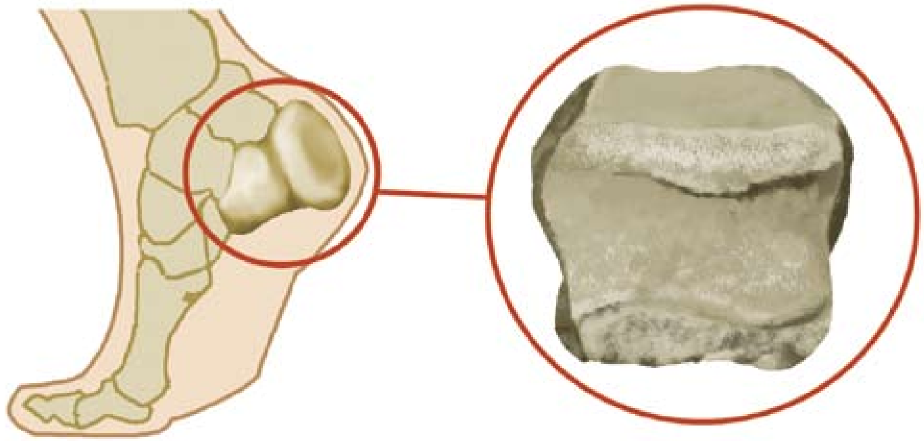
Em uma cidade há duas maternidades, uma grande e outra pequena. Dos fatos mencionados a seguir, algum tem mais probabilidade que outro de ocorrer, ou os dois são igualmente prováveis?

Fato A: Nascerem 250 ou mais meninas dos primeiros 500 bebês na maternidade grande.

Fato B: Nascerem 25 ou mais meninas dos primeiros 50 bebês na maternidade pequena.

- Discuta a probabilidade, nesse caso, em relação ao espaço amostral.
- Se o espaço amostral for maior, há maiores probabilidades de certas ocorrências?

O conhecimento de probabilidade não é algo recente. Livros de história da matemática destacam que ele surgiu por meio de problemas envolvendo jogos e apostas. Há indícios de que homens primitivos usavam um osso para jogar, o "astrágalus", osso do calcanhar.



As regras do “jogo do osso” eram parecidas com a do jogo dos dados, mas com quatro faces, sendo os valores 4 e 3 para as faces maiores, e 1 e 6 para as duas faces menores. O “Osso” do jogo é um objeto assimétrico e foi por meio de experimentos que se mostrou que as probabilidades de ocorrência eram:

$$P(4)=0{,}39;$$
$$P(3)=0{,}37;$$
$$P(1)= P(6)=0{,}12.$$

PESQUISA

A soma de todas as possibilidades deve resultar 1 ou 100%. Você saberia dizer o motivo para isso?

ATIVIDADE

- O que pode acontecer, em termos de probabilidade, se lançarmos um objeto simétrico, como uma moeda? E se for um objeto assimétrico?
- Organize-se em grupos e faça experimentos ou lançamentos com objetos assimétricos, como tacha ou percevejos, e construa uma tabela para analisar as probabilidades. Faça o mesmo com uma moeda e compare as duas tabelas.

Talvez o dado seja o material mais simples para o início de um estudo sobre as “chances” de vitória em algum jogo. O dado é considerado um objeto simétrico e, por isso, todas as faces têm a mesma chance de cair para cima. Quando isso acontece, diz-se que o dado é honesto. Isso não aconteceria se o “dado” não fosse simétrico, ou se tivesse sido “desequilibrado” pela inclusão de algum material mais pesado em um de seus vértices ou faces.

ATIVIDADE

Verifique:

- Qual o espaço amostral do lançamento de um dado não viciado? E do lançamento de dois dados?
- Qual a probabilidade de sair o evento 1 no lançamento de um dado? E de sair o 6? Desafio: realize um experimento para constatar esses fatos.
- No lançamento do “osso”, qual evento tem maior possibilidade de sair? Por quê?

Em certa época, jogadores profissionais de dados e cartas procuraram pessoas que fossem capazes de calcular quais seriam as melhores apostas a fazer, ou, em outras palavras, desejavam saber a probabilidade de ganhar certos jogos. Dessa forma, alguns tipos de jogos passaram a ser objeto de estudos, de modo que foram organizados manuais contendo hipóteses, cálculo de expectativas e previsões, principalmente para jogos de dados.

Um jogador, conhecido por **Cavaleiro de Méré**, foi uma das pessoas que, em 1650, procurou Blaise Pascal, para resolver problemas com os quais tinha se deparado em suas partidas de jogos de dados.

ATIVIDADE

Vamos pensar sobre o problema que ele enfrentou.

Jogando com um par de dados honestos, quantos lances são necessários para que tenhamos uma chance favorável de obtermos um duplo-seis, ao menos uma vez?

- Uma chance favorável ao jogador deverá ser maior que 50%. Então, quantos lances seriam necessários?
- Investigue, ao jogar dois dados, qual a probabilidade de sair o evento duplo seis? E a probabilidade de não sair o duplo seis?
- Compare as duas questões anteriores. O que se obtém com a soma desses resultados?

Os jogos surgiram nas mais variadas culturas e existem há muitos séculos. As pessoas sempre jogaram por uma razão ou outra. Mas...

É racional uma pessoa arriscar seus bens à casualidade dos jogos como loterias, máquinas, caça-níqueis ou bingos?

Algumas pessoas jogam apenas como uma atividade de lazer e distração, enquanto outras jogam por vício e muitas vezes arriscam todos os bens que possuem, e mais os de seus familiares. Alguns tipos de jogos nos distraem e ajudam a perceber certas regularidades; no entanto, considerar os jogos como uma esperança de realização financeira é muito arriscado; você sabe por quê?

Muitas vezes num jogo, as possibilidades de ganhar ou de perder dependem de vários fatores, inclusive se as regras desse jogo permitem aos jogadores igualdade de oportunidades. Você conhece o "jogo da velha"? Sabia que se o primeiro a jogar marcar um "X" no espaço central, qualquer que seja a jogada do segundo jogador, se o jogo for jogado corretamente, nunca o segundo jogador conseguirá a vitória? [Jogado corretamente o jogo e começando dessa forma, resultará sempre em empate]. Então, o que estamos dizendo é que alguém que tenha essa informação poderá até jogar "honestamente", mas estará sendo desonesto se exigir ser o primeiro a começar. Um jogo possui "regras", e estas regras não são – elas mesmas – "honestas" ou "desonestas". Deste modo, o conhecimento que temos das regras e o uso que fazemos delas podem modificar a relação que temos com o nosso adversário e isso tem um forte sentido ético.

Você já observou pessoas que tentam tirar vantagens de algumas situações cotidianas?

Vamos analisar duas situações:

Situação 1

Com a intenção de sortear uma calculadora, um professor de matemática pede para cada aluno retirar, de uma urna que está sobre a mesa, um papel numerado. Esse papel contém o número de cupons a que o aluno tem direito para concorrer ao sorteio. Os números nos papéis não são repetidos e vão de 1 até o total de alunos presentes na sala de aula. Caso o aluno retire o número um dessa urna, concorre com um cupom; se tirar o número dois, concorre com dois cupons, e assim por diante. Qual aluno terá chance maior de ganhar essa calculadora? Seria ele o ganhador?

- Todos os alunos têm a mesma probabilidade de ganhar a calculadora? Justifique.
- Na distribuição de cupons todos os participantes foram colocados na mesma condição de sorte? E na hora do sorteio? Houve desonestidade nesse sorteio? Reflita!
- Pense e registre estratégias nas quais todos os alunos tenham a mesma probabilidade de ganhar a calculadora.

Situação 2

Numa casa de jogos há um jogo de dado no qual a premiação ocorre da seguinte forma:

- O jogador nada recebe se sair os números 4, 5 ou 6.
- O jogador ganha 50% a mais do que apostou se sair os números 2 ou 3.
- O jogador ganha 3 vezes o que apostou se sair o número 1.

Uma pessoa interessada em participar desse jogo deseja saber se ele é justo. Pede ajuda a um amigo que sempre apostou nessa casa de jogos. Tal amigo lhe confidencia que observou que o dado é viciado e em virtude disso, o número 6 sai o triplo das vezes em relação aos números restantes e, por isso, o jogo é proposto com essas condições.

Neste caso, o jogo é equilibrado? Quem terá maiores chances, os jogadores ou o dono da casa de jogos?

ATIVIDADE

Para refletir sobre essa situação, vamos considerar um **dado honesto** que ao jogá-lo temos o Espaço Amostral {1, 2, 3, 4, 5 e 6}, neste caso:

- Qual a probabilidade de sair o número 4, 5 ou 6 e perder o que apostou?
- Qual a probabilidade de sair os números 2 ou 3 e ganhar 50% a mais do que apostou?
- Qual a probabilidade de sair o número 1 e ganhar três vezes o que apostou?

Mas, considerando que o **dado é viciado**, todos os números têm a mesma probabilidade de sair, exceto o seis. A probabilidade para ele é o triplo daquela que vale para qualquer outro número. Investigue.

- Qual a probabilidade de perder tudo que apostou?
- Qual a probabilidade de ganhar 50% acima do valor que apostou?
- E de ganhar 3 vezes o que apostou?
- Compare os resultados do dado honesto e do viciado e verifique se esse jogo é justo ou não.

Se você analisou com atenção a situação 1 e a 2, certamente percebeu que na primeira, apesar dos alunos concorrerem com diferenças enorme de chance, as regras foram claras, pois inicialmente eles estiveram sujeitos apenas a aleatoriedade, ou seja, concorreram em igualdade de condição. Enquanto na segunda situação, as regras não eram claras, não constava que o dado era viciado. Comparando os resultados do dado honesto com o viciado, você deve ter percebido que no dado viciado as chances do dono da casa de jogos são bem maiores e isso foi ocultado. Assim...

DEBATE

- Reflita se a questão ética nos jogos pode mudar a probabilidade dos seus resultados.
- Discuta os princípios éticos envolvidos em situações como estas que nos aparecem no dia-a-dia. Como na fila do banco, numa prova ao "colar", no trânsito...

Chauí (1994) ressalta que "para que haja conduta ética é preciso que exista o agente consciente, isto é, é preciso conhecer a diferença entre bem e mal, certo e errado, permitido e proibido, virtude e vício". Além disso, salienta que é a consciência moral quem identifica tais diferenças e permite julgá-las.

Assim, percebe-se que questões éticas, nas diversas perspectivas, podem interferir no curso natural dos fatos que acontecem no nosso dia-a-dia.

Quais serão as estratégias das casas de jogos para obter lucros?

Situações de decisão baseada na probabilidade de acontecer, ou não um evento, é um fato muito comum no nosso dia-a-dia. Muitas vezes agimos por um instinto, mas algumas pessoas não. Um exemplo que acontece muito é disputar o "par ou ímpar" nos campeonatos para verificar qual time sai com a bola. Veja o que aconteceu numa dessas disputas, na qual alguns agiram por intuição e outros não.

ATIVIDADE

Ao iniciar uma partida de futsal no colégio, os meninos disputaram no "par ou ímpar" para verificar quem sairia com a bola. Para isso, combinaram que não valeria mão fechada representando o zero. A equipe que jogou ímpar perdeu, então, um dos jogadores dessa equipe, inconformado com a perda, disse que dessa forma jogo de **par ou ímpar** é injusto. Houve a maior confusão! Seria Verdade? Será que nessas condições existem probabilidades diferentes de sair par ou de sair ímpar? Organize-se em grupos e faça um esquema que permita verificar.

Nesse sentido, o cálculo de probabilidades, ou seja, a análise do que tem maior chance de ocorrer aparece nas mais variadas situações, inclusive na área da saúde. Desta forma, tem auxiliado na cura ou prevenção de muitas doenças.

Os estudos sobre a estrutura das moléculas do DNA (ácido desoxirribonucléico), substância que armazena as características hereditárias, possibilitam calcular a probabilidade de uma pessoa ter determinadas doenças.

Entre tantas situações, o estudo das probabilidades, com o exame do DNA, tem ajudado a resolver uma dúvida antiga, a paternidade de uma criança e também alguns casos de crimes.

O estudo das combinações do código genético do DNA, através da probabilidade, tem solucionado as possíveis dúvidas relacionadas à paternidade biológica, uma vez que o ser humano possui 23 cromossomos de origem materna e 23 de origem paterna.

Cromossomo: estrutura encontrada no núcleo da célula, constituída de DNA e proteínas.

Mas como é comprovada a paternidade?

Isso é possível com um teste de paternidade, um exame laboratorial. Existem vários métodos para a realização desse exame, um deles utilizando Sondas "Single-Locus". Neste caso:

- Localiza regiões precisas do DNA.
- Separam alelos, da mãe, do filho e do suposto pai e faz comparações entre eles.

Alelos: Alelos são genes que compõem os cromossomos e que carregam as mesmas características.

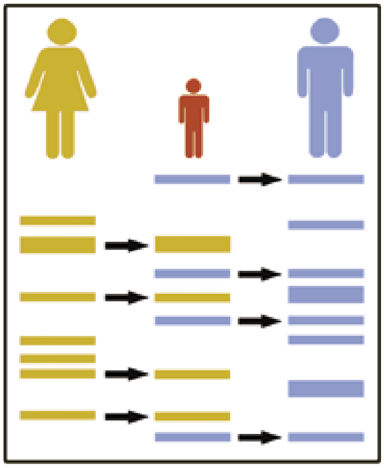
Este exame pode ser realizado utilizando vários materiais, o mais comum é por meio do sangue da mãe, da criança e do suposto pai. Com a técnica laboratorial, a eletroforese, separa-se o DNA, formando as bandas de fragmentos de DNA, faixas escuras que permitem visualizar, analisar e comparar as características dos genes. Para confirmar ou não a paternidade biológica, basta comparar as bandas de alelos e identificar se os fragmentos da criança coincidem com o da mãe e outro do pai.

Gene: parte do cromossomo capaz de definir característica específica.

Veja como pode ser a representação visual dos fragmentos das bandas de DNA por meio da eletroforese

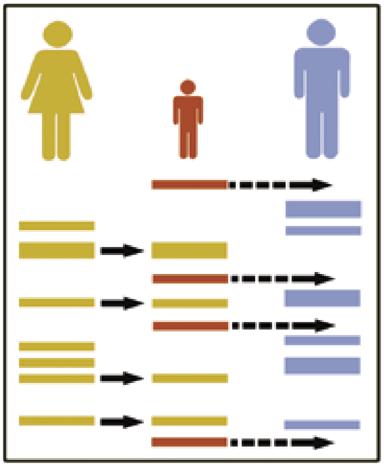
Exemplo1:

- Coincidência de alelo com o da mãe e um com o do suposto pai.
- Neste caso, a probabilidade de ser o pai é considerada 99,99... % e não é mais discutido biologicamente.
- Portanto: EVENTO CERTO!



Exemplo 2

- Não há coincidências entre os alelos da criança e do suposto pai.
- A probabilidade é de 0 % de ser o pai. Portanto: Evento Impossível!



Você já deve ter percebido que a Probabilidade (P) de um experimento aleatório acontecer varia entre 0% e 100%, portanto: $0 \leq P \leq 1$, mas no caso da paternidade ou é 0% ou é 100%.

PESQUISA

- Investigue por que num exame de DNA, a probabilidade de ser o pai é de aproximadamente 99,99...%.
- Levante dados para construção de tabelas que permitam analisar as probabilidades de casos de doenças genéticas.

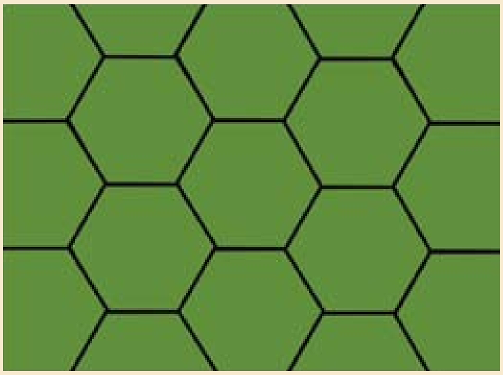
ATIVIDADE

Vamos brincar um pouco com a probabilidade?

Considere um plano, como visualizado a seguir, formado com hexágonos de lado a, dispostos em forma de mosaico, no qual será lançado aleatoriamente um disco de diâmetro d. Ganha quem lançar o disco e quando este pousar no solo e não interceptar nem tangenciar os lados de nenhum hexágono.

- Que medida determinar para o diâmetro do disco para que o jogo seja equilibrado, ou seja, nem tão fácil nem tão difícil?

- Qual o maior diâmetro possível?
- Qual a probabilidade de o disco de diâmetro d, depois de pousar no plano, não interceptar nem tangenciar os lados de nenhum hexágono?
- Crie um jogo com este ou outros tipos de mosaicos com formas geométricas regulares, discuta o diâmetro do disco e organize as probabilidades de ocorrências.



A presença de fenômenos com resultados imprevisíveis é algo que faz parte, freqüentemente, do cotidiano do ser humano. A incerteza está presente nas mais variadas situações e faz com que as pessoas, muitas vezes, com base numa intuição, que pode ser falsa, tomem decisões sobre temas decorrentes da incerteza sem refletir e sem conhecer ao menos os resultados que realmente podem acontecer.

Repense as atividades apresentadas. Reflita se um evento que possui maior probabilidade de ocorrer, realmente ocorre.

Se você tiver que tomar uma decisão numa situação que envolve aleatoriedade, qual seria sua aposta? Você deixaria de fazer cálculos e apostaria "na cega"?

Obras Consultadas

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. **Quatro Concepções de Probabilidade Manifestadas por Alunos Ingressantes na Licenciatura Em Matemática:** Clássica, Freqüentista, Subjetiva e Formal. PRAPEM - Grupo de Pesquisa do CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. São Paulo: Ed. Ática, 1994.

GARDNER. E. J.; SNUSTAD. D. P. **Genética**. 7ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1986.

Documentos Consultados *ONLINE*

GIMENEZ, C. H. **Teste de Paternidade por Análise do DNA**. Disponível em: http://www.ufv.br/dbg/BIO240/TP123.htm. Acesso em: 04 set. 2005.

SILVEIRA, J. F.P. **Início da matematização das probabilidades**. Disponível em: http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2.html. Acesso em: 29 ago. 2005.

VARANDAS, J. M. **Probabilidade**. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/ icm42/casino. Acesso em: 18 ago. 2005.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES